

Champ Électrostatique

I. Force de Lorentz / Champ électrique / potentiel

Définition du champ électrique

Une distribution de charges crée en un point M de l'espace un champ électrique $\vec{E}(M, t)$ tel que l'action de cette distribution sur une charge q' placée en M à l'instant t a pour expression

$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E}(M, t)$$

En régime stationnaire, le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ sera nommé champ électrostatique $\vec{E}(M)$

La présence de charges dans certaines régions de l'espace engendre donc en tout point M l'existence d'un champ électrique. Les caractéristiques de ce champ ont été traduites par les équations de Maxwell dont on donne ici les expressions dans le cas particulier d'une répartition statique des charges

Équations locales en électrostatique

Un tout point M où la densité volumique de charge est $\rho(M)$, le champ électrique vérifie les équations locales :

$$\text{Équation de Maxwell-Gauss (en statique)} : \operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

$$\text{Équation de Maxwell-Faraday (en statique)} : \operatorname{rot} \vec{E}(M) = \vec{0}$$

Potentiel électrostatique

Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ (indépendant du temps) dérive d'un potentiel scalaire $V(M)$ tel que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$$

- ✓ Écrire l'équation locale de Maxwell-Faraday
- ✓ Écrire la circulation de cette grandeur le long d'un contour fermé
- ✓ Exploiter la propriété de l'opérateur gradient pour justifier la possibilité de définir un potentiel V tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$

Énergie potentielle

Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est à circulation conservative, la force électrostatique dérive donc d'une énergie potentielle.

$$\mathcal{E}_p(M) = q' \cdot V(M)$$

- ✓ Exprimer le travail élémentaire de la force de Lorentz
- ✓ Rappeler la définition d'une énergie potentielle
- ✓ En déduire l'expression de l'énergie potentielle

II. Exprimer le champ électrostatique créé par une distribution de charges

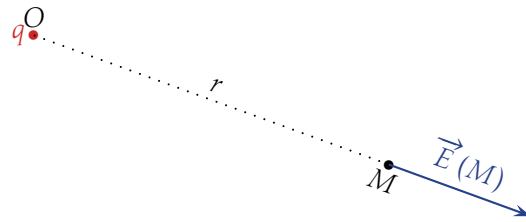
1. Cas d'une unique charge ponctuelle

Loi de Coulomb

Une charge ponctuelle q en O crée en M un champ électrique

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{OM^3} \cdot \overrightarrow{OM}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^9} \text{ S.I : permittivité du vide}$$



2. Cas d'une répartition non ponctuelle de la charge

Principe de superposition

Le champ électrique créé par N charges correspond à la somme des champs électriques créés par chacune des charges prises séparément.

Invariances d'une distribution de charges

On repère les translations et ou rotations qui laissent la distribution invariante

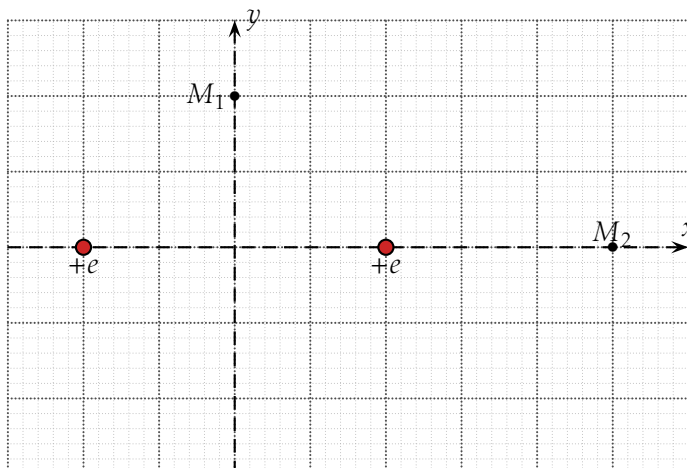
Symétrie

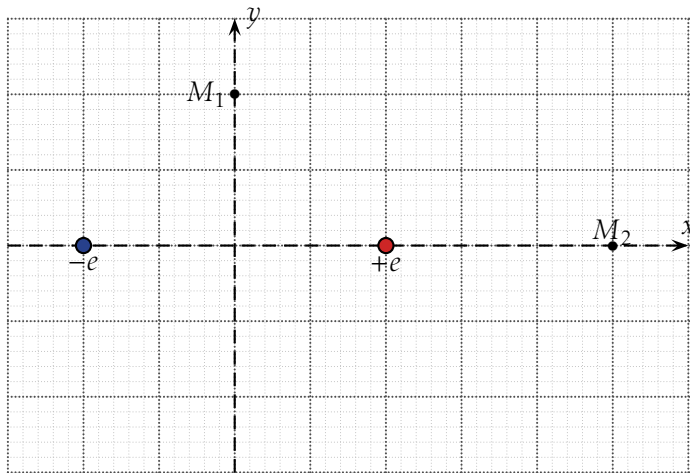
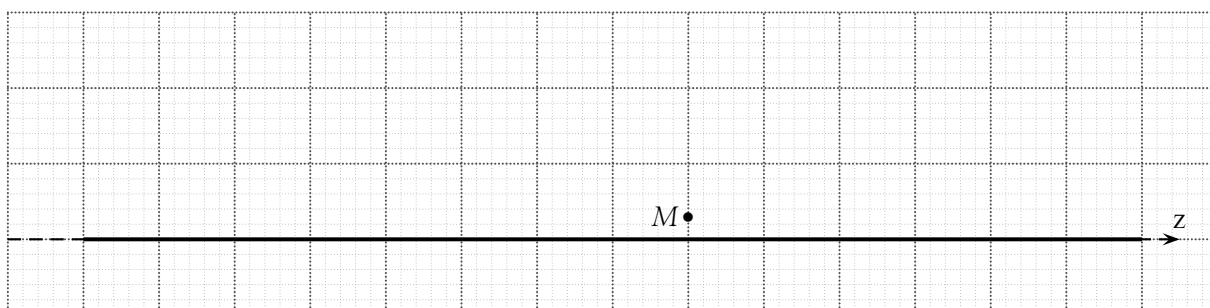
Par le principe de Curie, la conséquence (la force électrostatique appliquée à une charge en M doit avoir au moins les symétries de la cause (la distribution de charges créant le champ électrique en M). Comme la force de Lorentz et le champ électrique sont colinéaires, **le champ électrique a des propriétés de symétrie**, notamment :

- ✓ Si Π^+ est un plan de symétrie pour la distribution des charges contenant M alors $\vec{E}(M) \in \Pi^+$
- ✓ Si Π^- est un plan d'anti-symétrie pour la distribution des charges contenant M alors $\vec{E}(M) \perp \Pi^-$

Effets de bords : Lorsqu'un point M se trouve à une distance "très proche" et que vu de ce point, et selon un axe δ , les limites de la distribution des charges semble "très éloignées", on pourra alors considérer le champ $\vec{E}(M)$ invariant selon la coordonnée caractérisant la position du projeté de M selon cet axe Δ

Exploiter des plans de symétrie

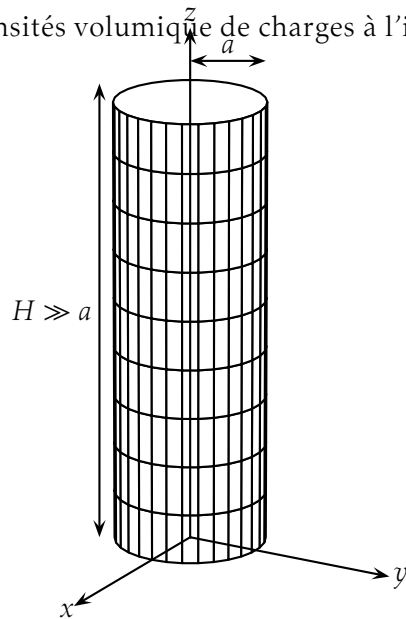


Exploiter un plan d'anti-symétrie**Exploiter les effets de bord**

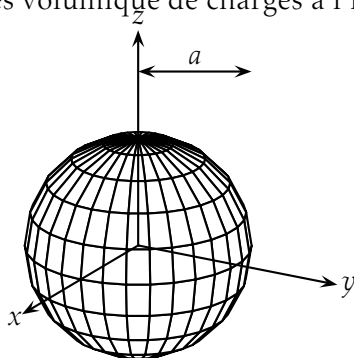
Méthode - Différentes symétries

Cylindre "infini"

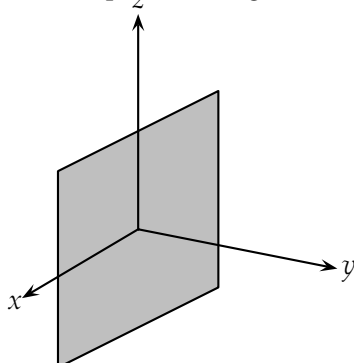
Densités volumique de charges à l'intérieur du cylindre ou surfacique sur l'enveloppe du cylindre

**Boule ou sphère**

Densités volumique de charges à l'intérieur de la boule ou surfacique sur l'enveloppe de la sphère

**Plan "infini"**

Densité surfacique de charges sur le plan $x = 0$



Théorème de Gauss

Le flux sortant de $\vec{E}$ à travers une surface fermée S enfermant une charge Q_{int} est tel que

$$\Phi_E = \iint_{P \in S} \vec{E} \cdot \vec{dS}_P = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

- ✓ Écrire l'équation locale de Maxwell-Gauss
- ✓ Intégrer l'équation sur un volume V délimité par une surface fermée S
- ✓ Exploiter le théorème d'Ostrogradski

Méthode - Exploiter le théorème de Gauss

- ✓ Étudier les invariances et symétries. En déduire
 - ✗ Le choix d'un système de coordonnées et d'une base adaptée
 - ✗ L'expression de $\vec{E}(M)$ en fonction **d'une seule coordonnée** et **d'un seul vecteur unitaire**
 Si cela n'est pas possible, le théorème de Gauss ne peut pas être exploité
- ✓ Choisir une surface de Gauss **fermée** où en tout point P de cette surface on retrouve l'une des deux conditions ci-dessous
 - ✗ $\vec{E} \parallel \vec{dS}$ et $E(P) = C^{te}$
 - ✗ $\vec{E} \perp \text{vec} dS$
 - ✗ Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers cette surface
 - ✗ Repérer la charge de la distribution enfermée à l'intérieur de cette surface. En déduire l'expression de Q_{int}
 - ✗ Appliquer le théorème de Gauss

3. Topographie**ligne de champ et équipotentielles**

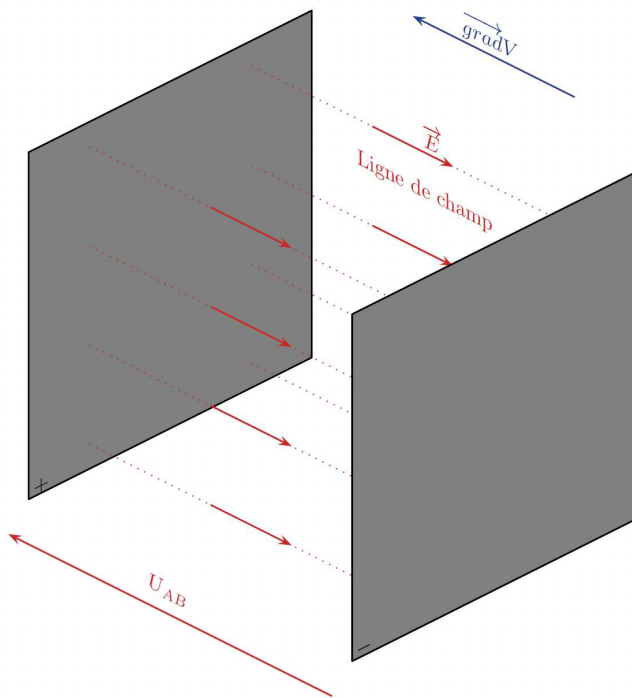
- ✓ En tout point M d'une **ligne de champ**, le vecteur $\vec{E}(M)$ est tangent à cette ligne
 - ✓ Le potentiel $V(M)$ est constant en tout point d'une surface équipotentielle
- On déduit de ces deux définitions que les lignes de champ sont **orthogonales** aux équipotentielles.

- ✓ On considère un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ sur la surface équipotentielle. En déduire une relation entre $\vec{\text{grad}} V$ et $\vec{dl}$
- ✓ En utilisant la relation champ potentiel, en déduire que $\vec{E} \perp \vec{dl}$

Méthode - Déterminer l'équation des lignes de champ

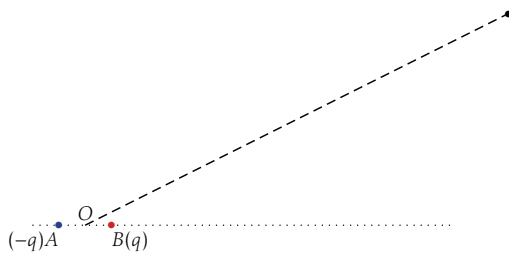
- ✓ Exprimer le champ $\vec{E}(M)$ d'une part, le déplacement élémentaire quelconque $\vec{dl}(M)$ d'autre part, dans la même base
 - ✓ Traduire la colinéarité des deux vecteur par le résultat d'une opération vectorielle.
 - ✓ Appliquer cette relation afin d'obtenir une expression différentielle liant deux coordonnées de l'espace
 - ✓ Déterminer par intégration l'équation paramétrique d'une ligne de champ.
- ✓ Les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentielles, orientées dans le sens des potentiels décroissants.
 - ✓ Les lignes de champ électrique sont nécessairement ouvertes

Exemple



III. Dipôle électrostatique

1. Champ crée par un dipôle dans l'approximation dipolaire



Dipôle et Approximation dipolaire

Deux charges opposées $-q$ et A et q en B constituent un dipôle électrostatique dont le moment dipolaire, exprimé en Debye, est

$$\vec{p} = q \cdot \overrightarrow{AB}$$

On se placera dans l'approximation dipolaire $OM \gg AB$

Potentiel crée par un dipôle

Dans l'approximation dipolaire, le potentiel crée en $M(r, \theta, \varphi)$ par un dipôle placé en O a pour expression :

$$V(M) = \frac{p \cdot \cos\theta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

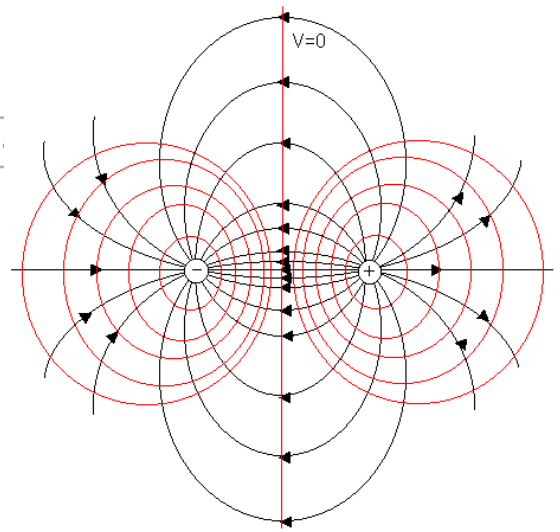
- ✓ Exprimer les potentiel $V_A(M)$ et $V_B(M)$ créés par les charges respectivement $-q$ et $+q$ en M
- ✓ Faire apparaître le rapport $\frac{a}{r} \ll 1$
- ✓ Effectuer un développement limité au deuxième ordre pour $V_A(M)$ et $V_B(M)$

- ✓ Utiliser le principe de superposition pour en déduire $V(M)$ créée par le dipôle.

Méthode - Déterminer l'expression du champ électrique d.

- ✓ Déterminer l'expression du potentiel créé par le dipôle
- ✓ Grâce à la relation champ potentiel, déterminer l'expression de $\vec{E}$ dans la base polaire.

On donne $\vec{\text{grad}} A(r, \theta) = \frac{\partial A}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta$



Méthode - Action d'un champ extérieur uniforme sur un dipôle

On considère un champ extérieur uniforme dans la zone du dipôle. Pour le dipôle placé en M , il faut savoir exploiter les relations suivantes (fournies)

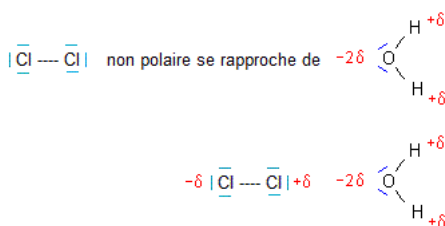
$$\text{Couple de forces : } \vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

$$\text{Résultante des forces : } \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{Énergie potentielle } E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$$

2. Liaisons de Van de Waals

Dipôle induit



Polarisabilité

Sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}_{ext}$, des atomes ou molécules non polaires acquièrent un moment dipolaire $\vec{p}$. On définit la polarisabilité α de l'atome ou de la molécule telle que

$$\vec{p} = \epsilon_0 \cdot \alpha \cdot \vec{E}_{ext}$$