

# Équations de Maxwell

En tout point de l'espace d'un milieu ayant des propriétés électromagnétiques analogues à celles du vide (permittivité  $\epsilon_0$  et de perméabilité  $\mu_0$ ), on considère :

|                              | Cas général     | Cas unidimensionnel pour les démonstration |
|------------------------------|-----------------|--------------------------------------------|
| densité volumique de charges | $\rho(M, t)$    | $\rho(x, t)$                               |
| densité de courants          | $\vec{j}(M, t)$ | $\vec{j}(M, t) = j(x, t) \cdot \vec{e}_x$  |

## I. Champ électromagnétique

### 1. Force de Lorentz

#### Force de Lorentz

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  : Une charge ponctuelle  $q$  en  $M$ , ayant une vitesse  $\vec{v}(M, t)$  dans ce référentiel subit de la part du champ électromagnétique  $[\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)]$  une force

$$\vec{f} = q \cdot [\vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)]$$

#### Force de Laplace

Un élément  $d\vec{l}$  d'un circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité  $I$ , avec  $d\vec{l}$  orienté dans le sens conventionnel pris pour  $I$ , et placé dans une zone de champ magnétique  $\vec{B}$  subit une force élémentaire

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

### 2. Équations de Maxwell

#### Équations de Maxwell

$$\text{M-Gauss} \quad \text{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$$

$$\text{M-Flux} \quad \text{div} \vec{B}(M, t) = 0$$

$$\text{M-Faraday} \quad \text{rot} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t)$$

$$\text{M-Ampère} \quad \text{rot} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \left[ \vec{j}(M, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t) \right]$$

**Remarque:** Dans le cas d'un régime quelconque,

- ✓ Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont liés par les équations de Maxwell. On parlera alors de champ électromagnétique.
- ✓ Le champ électrique ne dérive pas d'un potentiel scalaire.

## II. Aspects énergétiques

### 1. Puissance cédée aux porteurs de charges

#### Puissance volumique cédée aux charges

La puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux charges en un point  $M$  a pour expression

$$\mathcal{P}_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

- ✓ Exprimer la force de Lorentz pour un porteur de charge en mouvement
- ✓ En déduire la puissance cédée par le champ à ce porteur de charge
- ✓ Exprimer la puissance cédée à une unité de volume, faire apparaître la densité volumique de courant de charges

### 2. Bilan énergétique à partir des équations locales

#### Vecteur de Poynting

La densité surfacique de flux d'énergie électromagnétique est caractérisée par le vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

#### Énergie électromagnétique volumique

On associe au champ électromagnétique une énergie volumique

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot E^2 + \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot B^2$$

#### Équation locale de Poynting

Le bilan énergétique est traduit au niveau local par la relation :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = -\mathcal{P}_v$$

#### Méthode - Conduire un bilan d'énergie électromagnétique

Dans le cas de grandeurs harmonique (évolution temporelle sinusoïdale), on effectue un bilan sur les valeurs moyennes des grandeurs énergétiques

- ✓ Écrire la valeur moyenne de l'équation locale du bilan énergétique
- ✓ Discuter la valeur moyenne de  $\frac{\partial u_{em}}{\partial t}$
- ✓ En déduire que  $\left\langle \oint \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \right\rangle = -\left\langle \iiint \mathcal{P}_v \cdot d\tau \right\rangle$

### III. ARQS magnétique

#### 1. Équation de propagation dans le vide

##### Equation de propagation

Dans le vide, en notant  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ , le champ électrique  $\vec{E}$  associé à une onde vérifie l'équation d'Alembert tridimensionnelle

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

- ✓ Écrire l'équation de Maxwell-Faraday
- ✓ Exploiter la propriété des opérateurs  $\vec{rot}(\vec{rot} \vec{a}) = \vec{grad}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$
- ✓ Exploiter les équations de Maxwell Gauss et Maxwell-Ampère, en se plaçant dans le vide où  $\vec{j} = \vec{0}$  et  $\rho = 0$

On considèrera que la vitesse de propagation d'une onde dans un milieu conducteur par exemple sera du même ordre de grandeur que  $c$ .

#### 2. Conditions de l'ARQS

##### Méthode - Condition de l'ARQS pour un milieu conducteur

On raisonne sur un conducteur cylindrique de section  $S$  et de longueur  $L$

- ✓ Montrer qu'en régime stationnaire  $\vec{E}(x) = \vec{C}^{te}$
- ✓ En régime non stationnaire sinusoïdal, quel est la périodicité des variations spatiales pour  $\vec{E}(x)$
- ✓ Pour quelle condition sur  $L$  pourra-t-on considérer  $\vec{E}(x, t) \simeq \vec{E}(t)$  pour  $0 < x < L$ ?

##### ARQS magnétique

On pourra se placer dans l'ARQS magnétique dès lors que les dimensions du système étudié sont très faibles devant la longueur d'onde associée au phénomène électromagnétique.

#### 3. Équations de Maxwell et bilan énergétique, dans l'ARQS

##### Approximations dans l'ARQS magnétique

Dans ce cas, on pourra

- ✓ Négliger les courants de déplacement  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  **devant** les courants de conduction  $\vec{j}$
- ✓ Négliger l'énergie électrique **devant** l'énergie magnétique
- ✓ Considérer la densité volumique de charges  $\rho = 0$  dans un conducteur

Négliger les courants de déplacement :

- ✓ Considérer une évolution sinusoïdale du champ électrique dans un milieu de conductivité  $\gamma$
- ✓ Exprimer les amplitudes de  $\vec{j}$  et  $\vec{j}_D$
- ✓ Montrer que l'ARQS permet de négliger les courants de déplacement devant les courants de conduction

#### 4. Loi d'Ohm

##### Loi d'Ohm dans l'ARQS

On admet que dans le cadre de l'ARQS, la loi d'Ohm démontrée dans le cas statique peut s'appliquer selon la même relation.

#### 5. Loi de Faraday

##### Fem induite

Un circuit fermé immobile plongé dans une zone de champ magnétique  $\vec{B}$  peut être étudié dans le cadre de l'ARQS en modélisant les effets du champ magnétique par un générateur de fem induite

$$e_{ind} = -\frac{d}{dt} \left( \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

où le sens de la fem est donné par le choix du vecteur  $d\vec{S}$  selon la règle "du tire bouchon"

*On admet qu'il en est de même pour un circuit mobile dans une zone de champ uniforme.*

- ✓ Rappeler l'équation de Maxwell-Faraday
- ✓ Exprimer le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface quelconque et utiliser le théorème de Stokes
- ✓ Justifier l'homogénéité de la grandeur obtenue avec une fem et faire le lien avec la fem induite.