On étudie un système matériel dans un référentiel $\mathcal{R}\{OX, OY, OZ\}$supposé galiléen.

# I. Cinématique

## 1. Repérer un point

- ✓ Un point $M$ est repéré par ses trois coordonnées
- ✓ Dans une base (le plus souvent associée au repère), on peut projeter le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

Une base est fixe si la direction de ses vecteurs unitaires dans $\mathcal{R}\{OX, OY, OZ\}$est indépendante de la position de $M$, mobile sinon.

| Système | Coord. | Base associée | Vecteur position | Vecteur déplacement $e^{lt}$ |
|---|---|---|---|---|
| Cartésien | $(x, y, z)$ | $B\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$ | $\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{u_x} + y.\overrightarrow{u_y} + z.\overrightarrow{u_z}$ | $d\,\overrightarrow{OM} = dx.\overrightarrow{u_x} + dy.\overrightarrow{u_y} + dz.\overrightarrow{u_z}$ |
| Cylindrique | $(r, \theta, z)$ | $\begin{cases} B\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right) \\ B\left(\overrightarrow{u_x'}, \overrightarrow{u_y'}, \overrightarrow{u_z'}\right) \end{cases}$ | $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r} + 0.\overrightarrow{u_\theta} + z.\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_x'} + 0.\overrightarrow{u_y'} + z.\overrightarrow{u_z'} \end{cases}$ | $d\,\overrightarrow{OM} = dr.\overrightarrow{u_r} + r.d\theta.\overrightarrow{u_\theta} + dz.\overrightarrow{u_z}$ |
| Sphérique | $(r, \theta, \varphi)$ | $B\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\right)$ | $\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r}$ | $d\,\overrightarrow{OM} = dr.\overrightarrow{u_r} + r.d\theta.\overrightarrow{u_\theta} + r.sin\theta.\overrightarrow{u_\varphi}$ |

**Dérivation en base mobile**

Pour la base mobile associée aux coordonnées cylindriques, avec $\overrightarrow{e_z}$ fixe dans $\mathcal{R}\{OX, OY, OZ\}$

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}.\overrightarrow{e_\theta} \qquad \left(\frac{d\,\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{e_r}$$

- ✓ Représenter le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ aux instants $t$ et $t+dt$ puis $d\,\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{e_r(t+dt)} - \overrightarrow{e_r(t)}$
- ✓ En déduire le sens de $d\,\overrightarrow{e_r}$ ainsi que sa norme en fonction de $d\theta$
- ✓ En déduire l'expression de $\left(\frac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$

Procéder selon la même méthode pour la dérivée du vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$

## 2. Éléments cinématiques

### a. Vitesse et accélération

Soit $A$ un **point fixe** du référentiel d'étude quelconque $\mathcal{R}$ et $M$ le point étudié.

$$\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \quad \overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d^2\,\overrightarrow{AM}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}}$$

# II. Interactions

## 1. Modéliser une interaction

On associe à l'action d'un élément extérieur sur un système ponctuel $M$ une force $\overrightarrow{F}$, exprimée en Newton (N)

$$\overrightarrow{F}\left|\begin{array}{l}\text{de norme proportionnelle à l'intensité de l'interaction}\\ \text{de sens celui de l'interaction}\end{array}\right.$$

On peut associer à une force

- ✓ Le travail au cours d'un déplacement du point $M$ le long de la courbe $AB$ s'écrit

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}) = \int_{A\frown B} \overrightarrow{F}\cdot d\,\overrightarrow{OM} \text{ Unité : Joules (J)}$$

- ✓ La puissance

$$\mathcal{P} = \left(\frac{\delta W}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v}(M,\mathcal{R})$$

- ✓ Le moment par rapport à $O$ : $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{F}$

## 2. Exemple de forces

On considère un point $M$ matériel de masse $m$ et de charge $q$ et $O$ l'origine du repère.

### i. Forces Newtoniennes :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = K.\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}}$$

Exemples de forces Newtoniennes appliquées à $M$ :

- ✓ Par une masse $m_0$ placée en $O$ : $\overrightarrow{F} = -G\dfrac{m.m_0}{OM^3}\overrightarrow{OM}$ (force gravitationelle)
- ✓ Par une charge $q_0$ placée en $O$ : $\overrightarrow{F} = \dfrac{1}{4.\pi.\epsilon_0}\dfrac{q.q_0}{OM^3}\overrightarrow{OM}$ (force électrostatique)

### ii. Tension exercée par un fil inextensible

Le fil attaché à $M$ et tendu exerce sur le système lié à son extrémité une force dans la direction du fil, dirigée vers le fil.

### iii. Force de rappel du ressort

Un ressort de raideur $k$ placé selon un axe colinéaire à $\overrightarrow{u}$ a une longueur à vide $l_0$ et une raideur $k$.

Lorsqu'il a une longueur $l$, il exerce une force sur les systèmes liés à ses extrémités telle que

- ✓ $\boxed{\overrightarrow{F} = \pm k.(l-l_0).\overrightarrow{u}}$
- ✓ Il tende à retrouver sa longueur à vide (*ce qui permet d'en déduire le signe* $\pm$)

# III. Grandeurs cinétiques

Ces grandeurs dépendent du référentiel.

| Quantité de mouvement | Énergie cinétique | Moment cinétique en $O$ |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{p}(M,\mathcal{R}) = m.\overrightarrow{v}(M,\mathcal{R})$ | $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}.m.v^2(M,\mathcal{R})$ | $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M,\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM}\wedge m.\overrightarrow{v}(M,\mathcal{R})$ |

# IV. Étude dynamique d'un système ponctuel

## 1. Choix du référentiel

Il existe une classe de référentiels, dits galiléens, dans lesquels un système isolé a une trajectoire rectiligne uniforme

- ✓ Le référentiel de Corpenic (Origine : centre du soleil, axes dirigés selon trois étoiles éloignées) est considéré comme Galiléen
- ✓ Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

## 2. Théorèmes fondamentaux

Pour un système supposé ponctuel $M$ de masse $m$, étudié dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, avec un point $O$ fixe de ce référentiel :

### a. Principe fondamental de la dynamique :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{p}(M,\mathcal{R})}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}}$$

### b. Théorèmes des Énergie ou puissance

#### i. Force conservative

Une force est dite conservative s'il existe un potentiel $E_p$ tel que $\delta W(\overrightarrow{F}) = -dE_p$. Soit

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}\,(E_p)}$$

On décompose les forces extérieures en forces conservatives et non conservatives : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \sum \overrightarrow{F_c} + \sum \overrightarrow{F_{nc}}$

L'énergie mécanique d'un système est la somme de son énergie cinétique et de l'ensemble des énergies potentielles dont dérivent les forces conservatives

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p(tot)}}$$

Les théorèmes issus d'une étude énergétique :

| à partir de l'énergie cinétique | à partir de l'énergie mécanique | Utilisation |
|---|---|---|
| $E_{cB} - E_{cA} = \int_{A\frown B}\left(\sum \delta W(\overrightarrow{F_{ext}})\right)$ | $E_{mB} - E_{mA} = \int_{A\frown B}\left(\sum \delta W(\overrightarrow{F_{nc}})\right)$ | Relier des caractéristiques de $A$ et $B$ |
| $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{ext}})$ | $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{nc}})$ | Obtenir l'équation du mouvement |

### c. Théorème du moment cinétique :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\sigma_{/0}}(M,\mathcal{R})}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)}$$

### d. Quel théorème choisir ?

- ✓ Pour un système à un degré de liberté, les théorèmes énergétiques sont efficaces
- ✓ Pour un système en rotation ou soumis à des forces centrales, le théorème du moment cinétique peut être utilisé
- ✓ Si aucun des deux ne semble approprié, on appliquera le PFD.

## 3. Équilibre et stabilité

### i. Définitions

- ✓ Une position d'équilibre est telle que pour un point placé sans vitesse en cette position, il reste immobile
- ✓ L'équilibre est stable si une petite perturbation provoque un mouvement d'oscillation du système autour de la position d'équilibre

### ii. Propriétés

- ✓ À l'équilibre, $\boxed{\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right)_{M_q} = \overrightarrow{0}}$
- ✓ Pour un système conservatif à un degré de liberté de paramètre $u$, on a :
  - ✘ La position d'équilibre tel que $\boxed{\left(\dfrac{dE_p}{du}\right)_q = 0}$
  - ✘ Un équilibre stable si $\boxed{\left(\dfrac{d^2E_p}{du^2}\right)_q > 0}$

## 4. Mouvements à force centrale

### a. Propriétés générales

### i. Définitions

- ✓ Dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'étude où $O$ est un point fixe, le mouvement est à force centrale si la résultante des forces extérieures s'écrit sous la forme $\overrightarrow{R} = R.\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$
- ✓ Cette force est Newtonienne s'il elle s'écrit sous la forme $\overrightarrow{R} = \dfrac{k}{OM^3}.\overrightarrow{OM}$

### ii. Propriétés d'un mouvement à force centrale

- ✓ $\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{/0}}(M,\mathcal{R})}{dt} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{\sigma_{/0}}(M,\mathcal{R}) = \overrightarrow{C^{te}}$ : $\boxed{\text{Le mouvement est plan}}$
- ✓ Loi des aires : Le rayon-vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye des aires égales pendant des durées égales. On définit la constante des aires $C$ telle que $\boxed{\sigma_{/0}(M,\mathcal{R}) = m.C}$

### b. Mouvement des planètes

On utilise les coordonnées polaires et la base associée. Le système étudié, supposé ponctuel, est soumis à une force Newtonienne de type gravitationnelle. On considère le centre de force (l'étoile) de masse $M$ fixe dans le référentiel galiléen d'étude.

On définit $E_{peff}$ tel que $\boxed{E_m = \dfrac{1}{2}.m.\dot{r}^2 + E_{peff}}$

Les développements calculatoires (à savoir faire) permettent de déduire l'expression $E_{peff} = \dfrac{1}{2}.m.\dfrac{C^2}{r^2} - \dfrac{G.M.m}{r}$

Tout système d'énergie mécanique négative sera lié au centre de force.

**Trajectoires elliptiques**

Un satellite de masse $m$ a une trajectoire elliptique autour d'un centre de force de masse $M \gg m$, de demi grand axe $a$ et de période $T$. Alors

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M} E_m = \frac{-G.M.m}{2.a}$$

- ✓ On se place dans le cas particulier d'une trajectoire circulaire
  - ✘ Appliquer le PFD au satellite afin de retrouver la $3^{ieme}$ loi de Kepler
  - ✘ En déduire l'expression de l'énergie mécanique
- ✓ Généraliser les expression obtenues sachant que $r$ correspond au demi grand axe $a$ dans le cas particulier de la trajectoire circulaire.

## V. Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

On caractérise un solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta$

- ✓ sa masse totale $m$
- ✓ la répartition des masses par rapport à l'axe de rotation $J_\Delta$ (moment d'inertie en $kg.m^2$)

La seule grandeur cinématique est la vitesse angulaire de rotation $\omega$.

**grandeurs cinétiques associées au solide en rotation**

Moment cinétique par rapport à l'axe : $L_\Delta = J_\Delta.\omega$

Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}.J_\Delta.\omega^2$

**Actions extérieures sur le solide**

Pour une force $\overrightarrow{F}$ appliquée en un point $A$ du solide, on caractérise l'action de cette force sur le solide par

Moment par rapport à l'axe : $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F}) = \pm d.F$

avec $\left| \begin{array}{ll} d & \text{le bras de levier} \\ \pm & \text{selon la le sens de rot. du à F} \end{array} \right.$

Puissance $\mathcal{P} = mathcal M_\Delta.\omega$

On peut alors appliquer les théorèmes énergétique ou le TMC, qui s'écrit pour un solide en rotation :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta \overrightarrow{F}$$