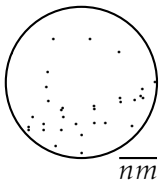


Cinématique des fluides

I. Particule de fluide

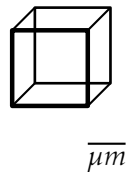
Échelle microscopique

- ✓ Observation des molécules
- ✓ mouvement Brownien
- ✓ $\langle \vec{v}_{mol.} \rangle \neq \vec{0}$



Échelle mésoscopique

- ✓ Milieu continu homogène
- ✓ $\langle \vec{v}_{mol.} \rangle = \vec{0}$



Échelle macroscopique

- ✓ Milieu continu
- ✓ inhomogénéité possible

$\gg \mu m$

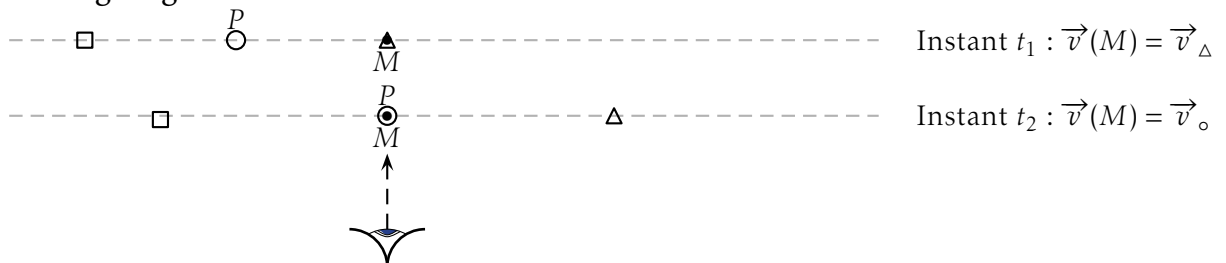
Particule de fluide

Volume élémentaire $d\tau$ de fluide de dimensions mésoscopiques, centré en un point M caractérisé par sa masse volumique $\mu(M)$:

$$\mu(M) = \frac{dm}{d\tau} \text{ exprimée en } \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

II. Descriptions lagrangienne / Eulérienne

1. Approches Lagrangienne/Eulérienne



- ✓ **Description Lagrangienne** : On décrit l'évolution temporelle des caractéristique d'une particule P au cours du temps.
Un GPS associé à une particule fournirait le champ Lagrangien des vitesses
- ✓ **Description Eulérienne** : On décrit l'évolution temporelle des caractéristique des particules au cours du temps en un point M fixé de l'écoulement *Un de vitesse situé au niveau de l'œil fournirait le champ Eulérien des vitesses*

En mécanique des fluides

- ✓ Les champs vectoriels ou scalaires seront fournis dans la description Eulérienne
- ✓ La dérivée temporelle de ces champs pour une particule P que l'on suit dans le temps sera nommée **dérivée particulaire**

2. Évolution d'une grandeur pour une particule

Dérivée particulaire

Pour une particule de fluide en un point M à l'instant t et pour un champ Eulérien vectoriel ou scalaire, la dérivée particulaire correspond à l'opérateur

$$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{v}(M, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)$$

3. Accélération particulaire

On exploite l'expression de la dérivée particulaire

$$\frac{D\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}(M, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}$$

Méthode - Accélération particulaire

Pour un point $M(x, y, z, t)$ et un point $M'(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$. Une particule de fluide se déplace de M à M' pendant la durée dt . On note $\vec{v}$ le champ Eulérien des vitesses

- ✓ Relier dx , $\vec{v}(M, t)$ et dt . Procéder de même pour dy et dz
- ✓ Exprimer l'accélération de la particule de fluide en fonction de $\vec{v}_{part}(t)$, $\vec{v}_{part}(t + dt)$ et dt . Relier les vitesses de la particule à t et $t + dt$ au champ Eulérien des vitesses.
- ✓ En déduire l'expression de l'accélération de la particule en fonction du champ Eulérien des vitesses.
- ✓ Montrer que cette expression peut s'écrire sous la forme $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}(M, t)}{\partial t} + \left(\vec{v}(M, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}(M, t)$

Accélération particulaire

On peut séparer l'expression de l'accélération particulaire en deux termes

- ✓ L'accélération locale $\vec{a}_{loc} = \frac{\partial \vec{v}(M, t)}{\partial t}$ qui correspond à la variation de vitesse en un point M de l'écoulement, en fonction du temps
- ✓ L'accélération convective $\vec{a}_{conv} = \left(\vec{v}(M, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}(M, t)$ due à l'évolution des lignes de courant pour l'écoulement



Vecteur tourbillon

- ✓ Les propriétés sur les opérateurs permettent de donner une expression de l'accélération particulaire

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} (v^2) + \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

- ✓ On peut définir un vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ tel que $\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{v}) = 2 \cdot \vec{\Omega}$

III. Débits et Bilan de masse

1. Débits

Densité de courant de volume de masse

A travers une section S , on définit :

- ✓ Le débit volumique $D_v = \frac{\delta V}{dt} = \iint_S \vec{j}_v \cdot \vec{dS}$ avec $\vec{j}_v = \vec{v}$
- ✓ Le débit massique $D_m = \frac{\delta m}{dt} = \iint_S \vec{j}_m \cdot \vec{dS}$ avec $\vec{j}_m = \mu \cdot \vec{v}$

Pour retrouver les expressions des vecteurs densité de courant de volume ou de masse on raisonne de manière analogue à la recherche du vecteur densité de courant de particules :

- ✓ Choisir une section dS orthogonale à $\vec{v}$
- ✓ Exprimer en fonction de $\vec{j}$ le volume (ou la masse) traversant dS pendant dt
- ✓ Déterminer en fonction de $\vec{v}$, dS (et éventuellement μ le volume (ou la masse) à l'instant t qui va traverser dS pendant la durée dt
- ✓ Identifier ces deux grandeurs.

2. Conservation de la masse

On considère le champ Eulérien de la masse volumique : description de l'évolution de la masse volumique en un point M fixé de l'écoulement.

Loi de conservation de la masse

Pour un écoulement quelconque, le principe de conservation de la masse se traduit par

$$\frac{D\mu}{Dt} + \mu \cdot \text{div} \vec{v} = 0$$

Méthode - Loi de conservation de la masse pour un écoulement unidimensionnel

On considère un volume d'épreuve de section S et de largeur dx avec les champs $\mu(x, t)$ et $\vec{v}(x, t) = v(x, t) \cdot \vec{e}_x$

- ✓ Exprimer la masse δm_e qui entre et δm_s qui sort du volume pendant la durée dt
- ✓ Exprimer la variation de masse $m(t + dt) - m(t)$ de ce volume pendant la durée dt
- ✓ Appliquer le principe de conservation de la masse et retrouver la relation $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu \cdot v)}{\partial x} = 0$
- ✓ Exprimer la dérivée particulaire de la masse volumique
- ✓ En déduire l'expression de la loi de conservation de la masse en fonction de la dérivée particulaire de μ .

IV. Caractéristique des écoulements

Écoulement stationnaire

Il s'agit d'un écoulement pour lequel tous les champs Eulériens sont indépendants du temps

$$\text{Pour un écoulement écoulement stationnaire : } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \text{ et } \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$



La vitesse $\vec{v}(P)$ d'une particule de fluide peut dépendre du temps pour un écoulement stationnaire.

Écoulement incompressible

Un écoulement est dit incompressible si une particule de fluide voit sa masse volumique constante au cours de l'écoulement, alors,

$$\text{Pour un écoulement incompressible : } \frac{D\rho}{Dt} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\text{Pour un tube de courant : } D_{v,e} = D_{v,s}$$

Méthode - Conservation du débit dans un tube de courant en écoulement stationnaire

- ✓ Choisir un volume dont la surface latérale s'appuie sur des lignes de courant
- ✓ Exploiter le théorème d'Ostrogradsky afin d'exprimer $\iiint_V \operatorname{div} \vec{v} d\tau$ en fonction de flux volumiques.
- ✓ Pour un écoulement stationnaire, en déduire que $D_{v,e} = D_{v,s}$

Écoulement irrotationnel

Un écoulement est dit irrotationnel si le vecteur tourbillon Ω est nul

$$\text{Pour un écoulement écoulement irrotationnel : } \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$$



On peut définir pour un écoulement irrotationnel un potentiel Φ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi$

Annexe : Rappels sur les opérateurs :

Scalaire	Base	gradient
$U(x, y, z)$	cart.	$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$
$U(r, \theta, z)$	cyl.	$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$

Exp. du scalaire	Base	Laplacien scalaire ΔU
$U(x, y, z)$	cart.	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$
$U(r, \theta, z)$	cyl.	$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$
$U(r, \theta, \varphi)$	sph.	$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$

Vecteur	Base	divergence $\operatorname{div} \vec{a}(M)$
$\vec{a}(x, y, z)$	cart.	$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
$\vec{a}(r, \theta, z)$	cyl.	$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
$\vec{a}(r, \theta, \varphi)$	sph.	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$

Laplacien vectoriel en cylindrique :	
$\Delta \vec{A} =$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_r}{r^2} \\ \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{u}_z \end{pmatrix}$

Vecteur	Base	rotationnel
$\vec{a}(x, y, z)$	cart.	$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}$
$\vec{a}(r, \theta, z)$	cyl.	$\begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$
$\vec{a}(r, \theta, \varphi)$	sph.	$\begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot a_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$