Dynamique des fluides parfait et visqueux

Équation de Navier-Stokes

Pour un écoulement visqueux d'un fluide Newtonien dans un référentiel galiléen

$$\frac{D\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{g} + \frac{1}{\mu}.\left(\eta.\Delta.\overrightarrow{v} - \overrightarrow{grad}\,p\right)$$

I. Écoulements parfaits

Dans le cas d'un écoulement d'un fluide supposé parfait, il suffit de poser $\eta = 0$. Mais l'équation doit pouvoir être démontrée dans ce cas

Équation d'Euler

Pour l'écoulement supposé parfait d'un fluide dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{D\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{g} - \frac{1}{\mu}\overrightarrow{grad}\,p$$

- ✓ Considérer une particule de fluide de volume $d\tau$
- ✓ Exprimer les forces appliquée à cette particule de fluide (de pesanteur et de pression)
- ✓ Appliquer le PFD afin de retrouver l'équation d'Euler

Méthode - Intégrer l'équation d'Euler

On rappelle que $\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right) = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{v}\right)\wedge\overrightarrow{v}$

On considère un fluide homogène et un écoulement incompressible pour lequel $\mu = C^{te}$

- ✓ Exprimer la circulation de l'accélération particulaire entre deux points A et B
- ✓ Simplifier cette expression si A et B sont sur une même ligne de courant, ou quelconques dans le cas d'un écoulement irrotationnel
- ✓ Montrer que $\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{grad}\,h$ avec h l'altitude au point M de l'écoulement
- ✓ En déduire que $\int_A^B \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}.\overrightarrow{dl} + \left[g.h + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\mu}\right]_A^B = 0$

1. Relation de Bernoulli et ses applications

Elle découle directement de la forme intégrale de l'équation d'Euler

Relation de Bernoulli

Pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène, (PSIH) dans le référentiel galiléen

- ✓ En tout point d'une ligne de courant
- ✓ En tout point de l'écoulement s'il est irrotationnel

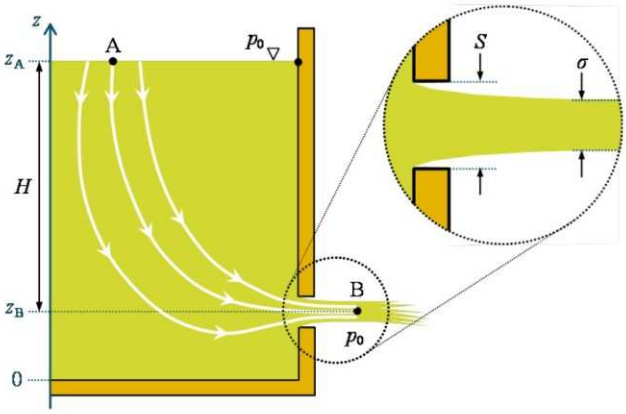
$$\frac{v^2}{2} + g.h + \frac{p}{\mu} = C^{te}$$

avec h l'altitude

- ✓ Pour tout écoulement dont la pesanteur n'en est pas la cause, on pourra négliger les variations d'altitude.
- ✓ Un bilan macroscopique permet de retrouver la relation de Bernoulli

2. Études de cas

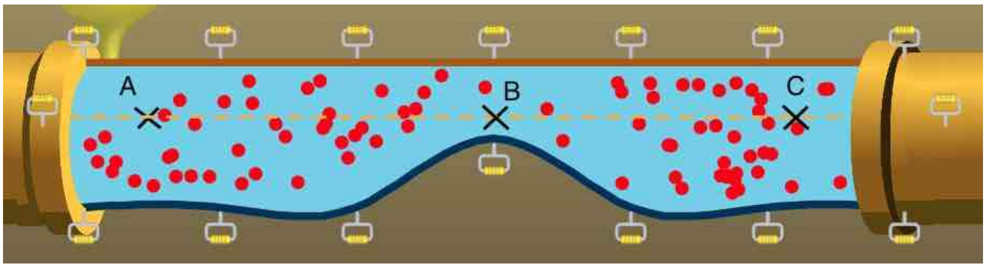
Application 1: Vidange d'un réservoir



Un réservoir est muni d'un robinet et rempli d'un liquide incompressible. On suppose que la section du robinet s et très petite devant la section S du réservoir.

- ✓ Pourquoi peut-on considérer l'écoulement stationnaire ?
- ✓ Relier les vitesses à la surface du liquide et au niveau du robinet
- ✓ En déduire l'expression de la vitesse de l'écoulement au niveau du robinet, puis du débit volumique.

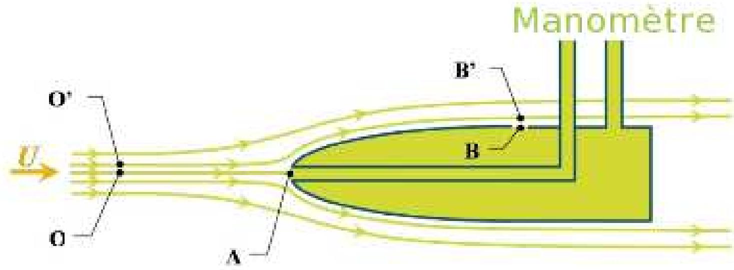
Application 2: Débimètre à effet venturi



L'écoulement du fluide de masse volumique μ dans la conduite est supposé PSIH. On connait les sections de la conduite S_A et A et S_B en B. Des capteurs mesurent les pressions p_A et A et p_B en B, ce qui permet d'obtenir $\Delta p = |p_B - p_A|$

- ✓ Relier les vitesses de l'écoulement v_A et A et v_B et B
- ✓ Appliquer la relation de Bernoulli entre A et B. En déduire l'expression de v_A
- ✓ Montrer que l'on peut déduire des données et mesures le débit volumique de l'écoulement.

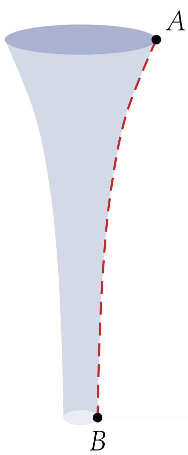
Application 3: Sonde Pitot



On considère la vitesse v_0 de l'écoulement dans le référentiel galiléen lié à la sonde, loin de celle-ci, et p_0 la pression associée. On considère l'écoulement PSIH avec μ la masse volumique.

- ✓ Exprimer la pression en A en fonction de v_0, μ et p_0
- ✓ Évaluer la vitesse en B en considérant la section de la sonde très fine. En déduire que $p_B = p_0$
- ✓ Le manomètre mesure $\Delta p = p_A - p_B$. Exprimer v_0 en fonction de Δp

Application 4: Forme d'un jet d'eau vertical



Justifier que la section du jet d'eau diminue au fur et à mesure de l'écoulement.

II. Écoulements visqueux : Résistance hydraulique

Résistance hydraulique

Pour un écoulement de Poiseuille, il y a nécessité d'imposer un gradient de pression afin d'obtenir un débit volumique. Par analogie aux phénomènes électriques

$$R_H = \frac{p_e - p_s}{D_v}$$

L'étude d'un circuit hydraulique peut se faire par modélisation et associations de résistances avec les lois analogues à celles de l'électrocinétique.