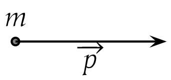
On considèrera sur l'ensemble de ce cours une particule quantique susceptible de se trouver sur un axe Ox, le problème est donc unidimensionnel.

I. Amplitude de probabilité

1. Une dualité onde-corpuscule

Approche corpusculaire



Caractéristiques :
- ✓ Position x
- ✓ Quantité de mouvement $\overrightarrow{p} = p.\overrightarrow{e_x}$

Approche ondulatoire

Paquet d'ondes

Caractéristiques :
- ✓ Fonction d'onde $\Psi(x,t)$
- ✓ densité de probabilité de présence à l'abscisse x

Fonction d'onde

L'état physique d'une particule quantique (quanton) est parfaitement défini par une fonction d'onde complexe Ψ qui représente **l'amplitude de probabilité** de l'état considéré.

Équation de Schrödinger

La fonction d'onde Ψ d'un quanton d'énergie potentielle $V(x)$ pour un système unidimensionnel vérifie l'équation (*fournie*)

$$i.\hbar.\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2.m}.\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x).\Psi$$

$V(x)$ désigne ici une énergie potentielle et non un potentiel électrique.

- ✓ Pour l'approche unidimensionnelle de ce cours, $\Psi(x,t)$
- ✓ On écrira cette fonction d'onde **complexe** $\Psi(x,t)$ et non $\underline{\Psi}(x,t)$

2. Interprétation probabiliste

densité linéïque de probabilité

P_{lin} représente la densité linéïque de probabilité d'existence de l'état physique du quanton.

$$P_{lin} = \frac{dP(x)}{dx} = |\underline{\Psi}(x,t)|^2$$

normalisation de la fonction d'onde

La fonction d'onde doit être normalisée telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 .dx = 1$$

La particule se trouvant nécessairement sur l'axe Ox, la probabilité de la trouver quelque-part sur l'axe est égale à 1

II. Étude d'une particule libre

Particule libre

Une particule est libre si elle n'est soumise à aucun champ de force. Son énergie potentielle est donc constante, que l'on choisit nulle

Pour une particule libre : $V(x) = 0$

1. État stationnaire

État stationnaire

On appelle état stationnaire l'état de la particule libre associé à une énergie déterminée. On écrit alors la fonction d'onde sous la forme

$$\Psi(x,t) = \Phi(x).e^{-i\omega.t}$$

A cette fonction d'onde de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2.\pi}$ est associée l'énergie E de la particule par le postulat de Planck-Einstein

$$E = h.\nu = \hbar.\omega \text{ avec } \hbar = \frac{h}{2.\pi}$$

- ✓ $h = 6,62.10^{-34}\ J.s$: Constante de Planck
- ✓ Une particule libre non relativiste aura alors une énergie $E = \frac{1}{2}.m.v^2$

Méthode - Relation de dispersion

- ✓ Proposer la forme de $\Psi(x,t)$ associée à une particule libre
- ✓ Exploiter l'équation de Schrödinger pour trouver une E.D. vérifiée par $\Phi(x)$
- ✓ Montrer que les solutions s'écrivent sous la forme $\Psi(x,t) = \left[A_1.e^{i.k.x} + A_2.e^{-i.k.x}\right].e^{\frac{-i.E.t}{\hbar}}$

On en déduit donc la relation de dispersion vérifiée par $k = \sqrt{\frac{2.m.\omega}{\hbar}} = \frac{\sqrt{2.m.E}}{\hbar}$

Méthode - Longueur d'onde de De Broglie

- ✓ Considérer une particule libre
- ✓ Trouver la relation de dispersion
- ✓ Rappeler la relation entre longueur d'onde et pulsation spatiale. En déduire l'expression $\lambda = \frac{h}{p}$

Méthode - Vitesses de phase

- ✓ Rappeler la définition de v_φ. l'exprimer en fonction de p et ω.
- ✓ Relier ω et E
- ✓ En déduire une expression de v_φ en fonction de la vitesse v du quanton : $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{v}{2}$

- ✓ On observe que la vitesse de phase de l'onde ne correspond pas à la vitesse de la particule associée. Cela ne semble pas cohérent

- ✓ Cet état nommé "stationnaire" correspond à une onde progressive harmonique. Ce terme n'a donc pas le même sens que pour les ondes "classiques". L'explication sera donnée plus tard.

2. Paquet d'onde

On imagine non plus un état stationnaire mais une superposition d'états stationnaires d'énergies différentes associés à la particule.

La fonction d'onde correspondante serait alors le résultats d'une superposition d'OPPH de pulsations différentes, correspondant donc à un paquet d'onde

Méthode - Vitesse de propagation du paquet d'onde

- ✓ Associer la vitesse de propagation du paquet d'onde à la vitesse de groupe v_g
- ✓ Exprimer pour une pulsation ω le nombre d'onde k en fonction de ω
- ✓ En déduire que $v_g = v$

On rappelle la relation sur les paquets d'onde pour les caractéristiques temporelles : $\Delta t.\Delta\omega \approx 2.\pi$

Que l'

Inégalité d'Heisenberg

On peut associer à une particule quantique libre un paquet d'onde d'extension spatiale Δx, d'extension en pulsation spatiale Δk_x tels que

$$\Delta x.\Delta k_x > \frac{1}{2}$$

- ✓ Rappeler la relation entre extension temporelle Δt d'un paquet d'onde et la largeur spectrale $\Delta\omega$ associée
- ✓ Quelle est le terme correspondant à la pulsation spatiale ?
- ✓ Donner par analogie la relation entre extension spatiale Δx d'un paquet d'onde et la largeur spectrale Δk_x associée
- ✓ Vérifier la cohérence avec l'inégalité d'Heisenberg
- ✓ Montrer qu'elle peut également s'écrire $\Delta x.\Delta p_x > \frac{\hbar}{2}$

III. Densité de courant de probabilité

1. Définition

Courant de probabilité

On définit le courant de probabilité $\overrightarrow{J}$ comme la probabilité qu'une particule passe à une abscisse x pendant 1 seconde

Pour une particule libre à laquelle on associe un vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, on admet que

$$\overrightarrow{J} = |\Psi(x,t)|^2.\frac{\hbar.\overrightarrow{k}}{m}$$

Méthode - État stationnaire

- ✓ Exprimer la valeur moyenne de $\overrightarrow{J}$ pour un état stationnaire d'une particule libre
- ✓ Montrer que cette grandeur est indépendante du temps, d'où la qualification d'état stationnaire

IV. Potentiel uniforme par morceaux

1. Recherche des solutions

a. Postulat

Forme générale des solutions

- ✓ Dans chaque domaine où le potentiel est uniforme (et indépendant du temps), on recherche des solutions stationnaires

$$\Psi(x,t) = \varphi(x).e^{-i.\frac{E.t}{\hbar}}$$

- ✓ On doit vérifier en tout point la continuité de la fonction d'onde ainsi que de sa dérivée spatiale.

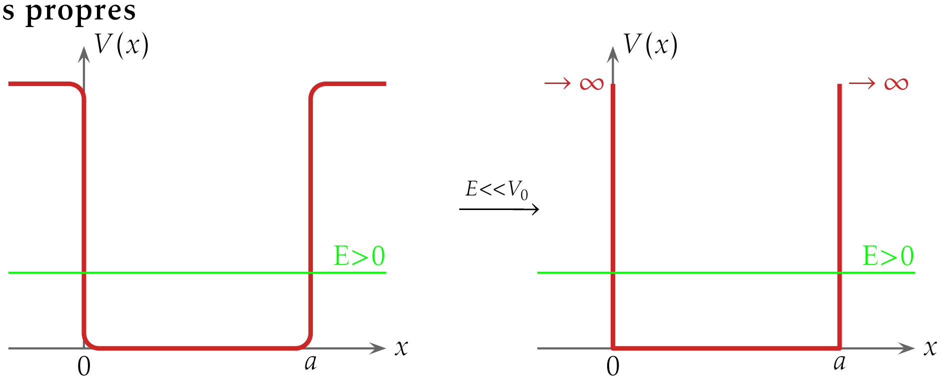
Méthode - Équation de Schrödinger pour un état stationnaire

- ✓ Proposer la forme générale de la solution $\Psi(x,t)$ faisant intervenir $\varphi(x)$
- ✓ Exploiter l'équation de Schrödinger pour en déduire l'équation différentielle

$$-\frac{\hbar^2}{2.m}.\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} + V(x).\varphi(x) = E.\varphi(x)$$

V. Puits de potentiel infini

1. Pulsations propres



Méthode - Modes propres

- ✓ Proposer la forme générale pour $\varphi(x)$
- ✓ Exploiter les CAL : $\forall x\ tq\ V(x) \to \infty\ :\ \varphi(x) = 0$
- ✓ En déduire les modes possibles
- ✓ Normaliser la fonction d'onde

$$\Psi(|x| < a) = \sqrt{\frac{2}{a}}.e^{-i.\frac{E_n}{\hbar}t}.sin\frac{n.\pi.x}{a} \text{ avec } E_n = n^2.\frac{\pi^2.\hbar^2}{2.m.a^2}$$

L'énergie dans un puits de potentiel infini est donc quantifiée.

a. Énergie minimale

i. Mode fondamental

Au vu de l'étude précédente, les modes associés à une particule sont tels que $E_n = n^2.\frac{\pi^2.\hbar^2}{2.m.a^2}$

Énergie minimale

Le mode fondamental correspond au niveau d'énergie minimum pour une particule quantique dans un puits infini de potentiel.
$E_{min} = \dfrac{\pi^2.\hbar^2}{2.m.a^2}$

Méthode - Évaluer l'énergie minimale à partir de l'inégalité d'Heisenberg

- ✓ Évaluer l'incertitude sur la position du quanton dans le puits, Δx
- ✓ Quelles sont les deux expressions possibles de $\overrightarrow{p}$ pour une particule d'énergie E dans le puits
- ✓ En déduire l'incertitude sur la quantité de mouvement projetée selon l'axe Ox, Δp_x
- ✓ Proposée une inégalité vérifiée par l'énergie d'un quanton dans le puits.

b. Densité de probabilité pour 1 mode

- ✓ Un mode propre est caractérisé par sa fonction d'onde

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}.sin\frac{n.\pi.x}{a}.e^{-i.E_n.t/\hbar}$$

- ✓ A ce mode correspond une densité de probabilité de présence

$$P_n(x) = \frac{2}{a}.sin^2\frac{n.\pi.x}{a}$$

Propriétés

- ✓ La densité de probabilité de présence est indépendante du temps pour un mode propre
- ✓ La densité de probabilité de présence a les symétries du potentiel $V(x)$

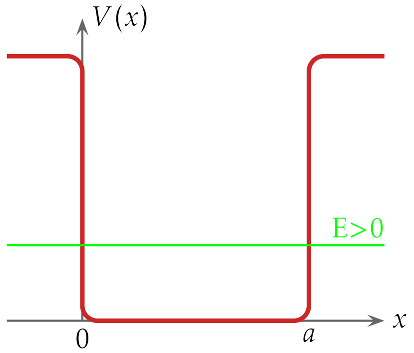
Les symétries du potentiel entrainent par conséquent des propriétés de symétrie ou antisymétrie pour la fonction d'onde propre.

c. Superposition d'états stationnaires

Superposition d'états stationnaires

La solution générale peut être décrite comme une superposition des états stationnaires
$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.\varphi_n(x).e^{-i.E_n.t/\hbar}$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = 1$
On peut alors obtenir une évolution non stationnaire.

VI. Puits de potentiel fini



$\xrightarrow{E<V_0}$

Régions hors du puits

La probabilité de présence en dehors du puits ne sera pas nulle dans les régions limitrophes du puits.

Méthode - Diminution de l'énergie minimale pour un puits de profondeur non infinie

On nomme E_{min} l'énergie minimale du quanton dans le puits de largeur a considéré comme infini et E'_{min} pour un puits de potentiel V_0.

- ✓ Comparer les incertitudes sur la position du quanton dans le puits $(\Delta x)_\infty$ pour le puits infini et $(\Delta x)_{reel}$ pour le puits réel.
- ✓ Un puits de profondeur finie peut-il être vu comme un puits de profondeur infini de largeur a' supérieur ou inférieur à a ?
- ✓ Rappeler la relation entre une énergie minimum dans un puits infini et a
- ✓ En déduire l'abaissement de l'énergie minimale pour un puits de profondeur non infinie