# Ondes électromagnétiques dans le vide

## I. Mise en équation

Le vide correspondra à l'absence de charges et de courants $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$ $\rho = 0$

**Equation de propagation**

Dans le vide, en notant $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, le champ électrique $\overrightarrow{E}$ associé à une onde vérifie l'équation d'Alembert tridimensionnelle

$$\Delta \overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

On obtient de même pour le champ $\overrightarrow{B}$ l'équation $\overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{B} - \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$

## II. Ondes planes progressives harmoniques

**OPPH**

Pour une direction de propagation $\overrightarrow{u}$ on définit le vecteur d'onde $\overrightarrow{\underline{k}} = \underline{k}\overrightarrow{u}$ associé à l'onde de pulsation $\omega$ telle que en tout point $M$ :

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \overrightarrow{\underline{E}_0} e^{j(\omega t - \overrightarrow{\underline{k}} \cdot \overrightarrow{OM})}$$

**Onde plane**

Une onde est dite plane si les surfaces d'onde sont des plans.
La vibration d'une onde électromagnétique plane dans un milieu neutre de charges est **nécessairement transversale**

---

- ✓ Donne la forme générale de l'onde pour une OPPH telle que $\overrightarrow{k} = k.\overrightarrow{e_x}$
- ✓ Exploiter la relation de Maxwell-Gauss
- ✓ En déduire que $\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{k} = 0$

**Relation de structure**

Pour une OPPH de vecteur d'onde $\overrightarrow{\underline{k}}$,

$$\overrightarrow{\underline{B}} = \frac{\overrightarrow{\underline{k}} \wedge \overrightarrow{\underline{E}}}{\omega}$$

---

- ✓ Se placer dans le cas simple où $\overrightarrow{\underline{E}} = E_0.e^{j.(\omega t - \underline{k}.x)}.\overrightarrow{e_y}$
- ✓ Exploiter une équation de Maxwell afin d'exprimer $\overrightarrow{\underline{B}}$
- ✓ Exprimer $\overrightarrow{\underline{k}} \wedge \overrightarrow{\underline{E}}$
- ✓ Retrouver la relation de structure

**Relation de dispersion - vitesse de phase**

La relation de dispersion correspond à l'expression de $\underline{k}$ en fonction de $\omega$.
Elle permet de déterminer la vitesse de phase associée à l'onde, vitesse de propagation d'une OPPH de pulsation $\omega$.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\mathcal{R}e\left(\underline{k}\right)}$$

**Méthode - Repérer la nature plane ou non d'une onde**

- ✓ Déterminer le sens du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ (sens de propagation de l'onde)
- ✓ Si l'amplitude du champ électrique et uniforme dans un plan orthogonal à la direction de propagation, l'onde est alors plane

**Méthode - Recherche de la relation de dispersion**

- ✓ Déterminer l'équation de propagation vérifiée par $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t)$
- ✓ Proposer une forme générale de l'écriture de $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t)$ associée à une onde progressive
- ✓ En déduire la relation de dispersion en exploitant éventuellement des conditions aux limites.

**Méthode - Vitesse de propagation de l'énergie d'une OPPH**

On considère une section $S$ dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{k}$. On note $v_e$ la vitesse de propagation de l'énergie.

- ✓ Exprimer la valeur moyenne du flux du vecteur de Poynting à travers $S$
- ✓ En déduire la valeur moyenne de l'énergie traversant $S$ pendant une durée $dt$
- ✓ Décrire le volume dans lequel se trouvait cette énergie à l'instant initial, en fonction de $dt$, $S$ et $v_e$
- ✓ Exprimer l'énergie électromagnétique moyenne contenue dans ce volume
- ✓ Relier les deux expressions obtenues afin d'en déduire l'expression de $v_e$

# III. États de polarisation d'une OPPH

- ✓ La notion de polarisation est étudiée pour les ondes planes électro-magnétiques mais se généralise aux autres ondes transversales
- ✓ On considère une onde se propageant selon l'axe $Ox$ croissant : $\overrightarrow{E} = E_0.cos\left(\omega t - k.x\right)\overrightarrow{u}$

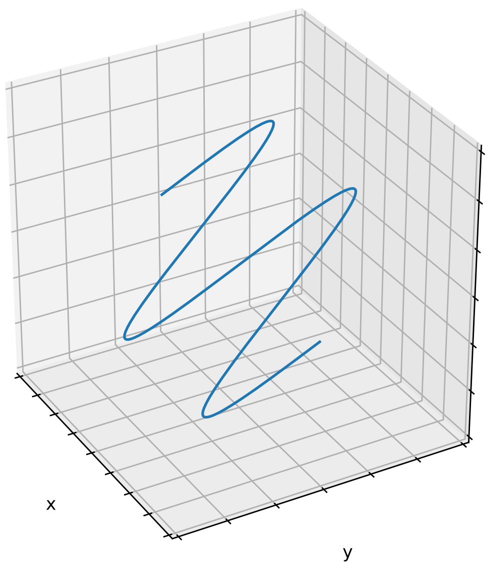
**Polarisation d'une onde**

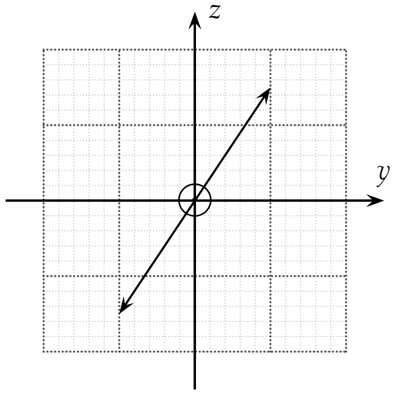
L'état de polarisation d'une onde est donné par l'évolution de $\overrightarrow{u}$ en fonction du temps **dans un plan d'onde**. On observe la vibration dans le plan d'onde avec **l'onde qui se propage vers nous**.

Si L'extrémité du vecteur $\overrightarrow{E}$ décrit :

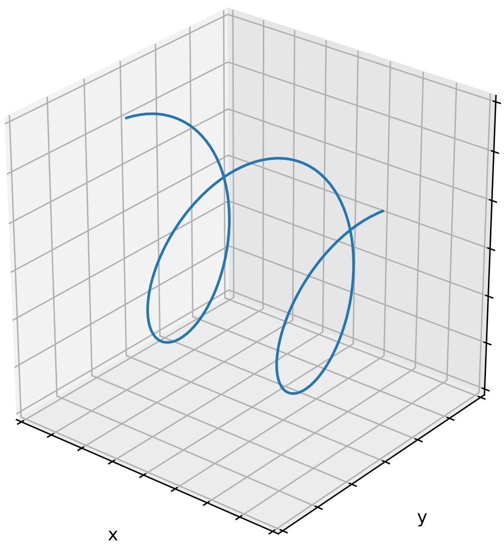
- ✓ Un segment, la polarisation est rectiligne
- ✓ Un cercle, la polarisation est circulaire (gauche dans le sens trigonométrique, droite dans le sens horaire)

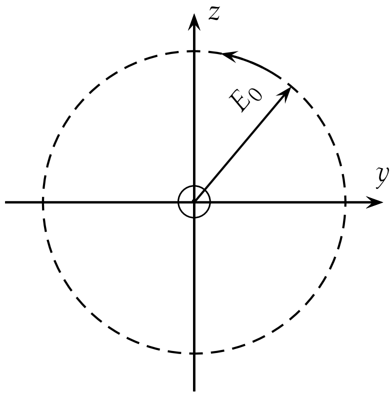
Polarisation rectiligne



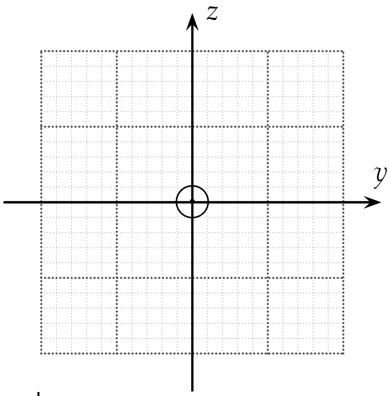

Polarisation circulaire

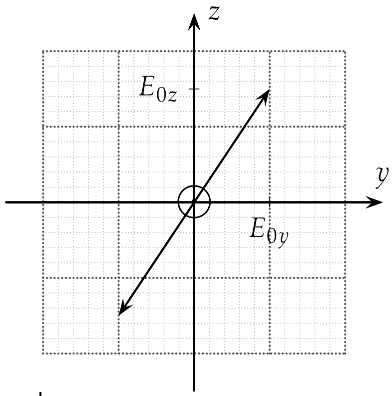


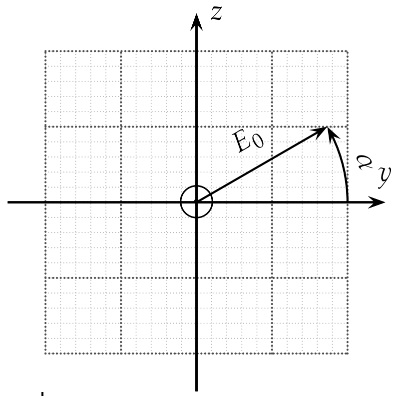




**Méthode - Polarisation rectiligne**

La superposition de deux vibrations selon les axes $OY$ et $OZ$ en phase ou opposition de phase avec des amplitudes quelconques donne une polarisation rectiligne




$\overrightarrow{E}$ | ............................................
............................................
............................................

$\overrightarrow{u}$ | ............................................
............................................
............................................

$\overrightarrow{E}$ | ............................................
............................................
............................................

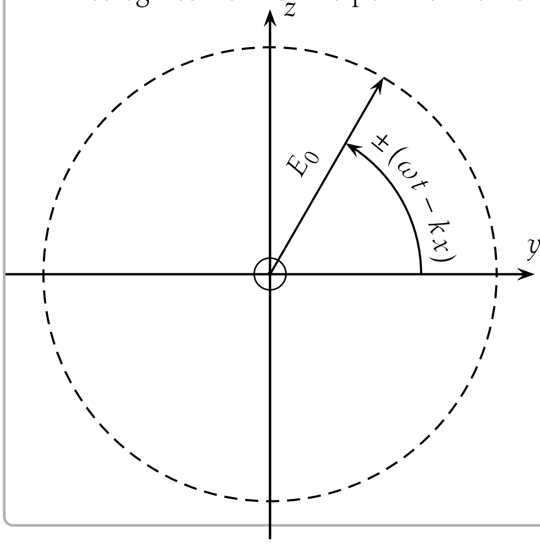
$\overrightarrow{u}$ | ............................................
............................................
............................................

$\overrightarrow{E}$ | ............................................
............................................
............................................

$\overrightarrow{u}$ | ............................................
............................................
............................................

**Méthode - Polarisation circulaire**

La superposition de deux vibrations selon les axes $OY$ et $OZ$ en quadrature de phase avec des amplitudes égales donne une polarisation circulaire

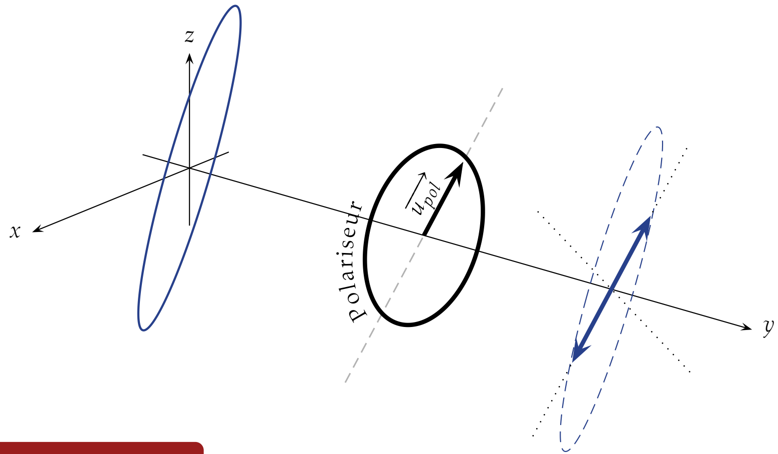



$$\overrightarrow{E}_{circ-gauche} \left| \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{E}_{circ-droite} \left| \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

# IV. Modification de la polarisation d'une OPPH

## 1. Action d'une lame polarisante




**Lame polarisante**

C'est une lame qui ne laisse passer les vibrations que selon un axe de vibration colinéaire à $\overrightarrow{u_{pol}}$ Pour un champ quelconque incident $\overrightarrow{E}$, le champ transmis par une lame polarisante sera polarisé rectilignement avec pour expression

$$\overrightarrow{E}_t = \left(\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{u_{pol}}\right)\overrightarrow{u_{pol}}$$

La polarisation d'une onde sera donc nécessairement rectiligne à la sortie d'une lame polarisante.

Une lame polarisante pourra être utilisée

- ✓ Afin de crée une onde polarisée rectilignement. On la nomme alors **polariseur**
- ✓ Afin d'étudier la polarisation d'une onde. On la nomme alors **analyseur.**

**Loi de Malus**

Si la direction privilégiée de l'analyseur fait un angle $\alpha$ avec la direction de polarisation d'une onde incidente rectiligne, l'intensité transmise vérifie la loi

$$I_t(\alpha) = I_{Max}.cos^2\alpha$$

**Méthode - Loi de Malus**

On considère un champ électrique du type $\overrightarrow{E} = E_0.cos(\omega t - kx).\left(cos\alpha\, \overrightarrow{e_y} + sin\alpha\, \overrightarrow{e_z}\right)$ et un polariseur d'axe de polarisation colinéaire à $OX$.

- ✓ Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associée au champ incident
- ✓ Déterminer l'expression du champ à la sortie du polariseur
- ✓ Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associée au champ à la sortie du polariseur
- ✓ L'intensité lumineuse est proportionnelle à la norme de la valeur moyenne du vecteur de Poynting. Retrouver la loi de Malus

**Application : Effet d'un polariseur sur une onde polarisée circulairement**

On considère une onde plane se propageant selon l'axe $OX$ et polarisée circulaire gauche, dont le champ électrique a une amplitude $E_0$. Un polariseur a sa direction de polarisation faisant un angle $\alpha = 30\,°$ avec l'axe $OY$.

Écrire le champ électrique de l'onde complètement l'onde à la sortie du polariseur.

# V. Milieux transparents

**Indice d'un milieu transparent**

Pour un milieu transparent d'indice $n$, le vecteur d'onde d'une OPPH aura pour expression

$$\overrightarrow{k} = n.\frac{\omega}{c}.\overrightarrow{u}$$

Le champ électrique vérifie alors l'équation d'Alembert $\Delta\overrightarrow{E} - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$

## 1. Action d'une lame biréfringente

On considère une lame d'épaisseur $e$ selon l'axe $Ox$ et une OPPH se propageant selon l'axe $Ox$

**Lame biréfringente**

Le milieu est non isotrope. On décompose la vibration du champ $\overrightarrow{E}$ selon deux axes nommées "lignes neutres" de la lame

- ✓ Le milieu a un indice $n_y$ pour la composante $\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{e_y}$ donc $\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{e_y} = E_{0y}.cos\left(\omega t - \frac{n_y.\omega.x}{c} + \varphi_y\right)$
- ✓ Le milieu a un indice $n_z$ pour la composante $\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{e_z}$ donc $\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{e_z} = E_{0y}.cos\left(\omega t - \frac{n_z.\omega.x}{c} + \varphi_z\right)$

On parle d'axe rapide pour l'indice le plus faible et lent pour l'autre.

**Déphasage par une lame biréfringente**

Pour une onde de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0$, une lame biréfringente engendre une différence de marche entre les deux vibrations de polarisation colinéaires aux axes neutres

$$\delta = \left(n_z - n_y\right).e$$

- ✓ Pour une lame quart d'onde : $\delta = \pm\frac{\lambda_0}{4}$
- ✓ Pour une lame demi d'onde : $\delta = \pm\frac{\lambda_0}{2}$

**Méthode - Déphasage introduit par la lame entre les deux composantes**

- ✓ Écrire les chemins optiques $(AB)_y$ pour la propagation de la composante selon $OY$ du champ au travers de la lame d'épaisseur $e$ et $(AB)_z$ pour la propagation de la composante selon $OZ$ du champ
- ✓ En déduire la différence de marche puis le retard de phase de la composante selon $OZ$ par rapport à la composante selon $OY$

**Effet d'une lame 1/4 d'onde**

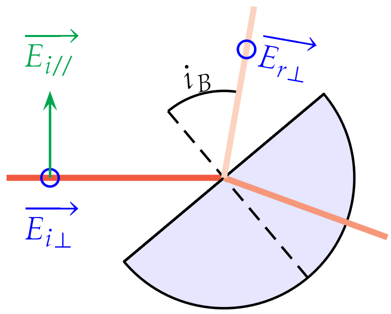
On obtient une polarisation circulaire en plaçant une lame quart d'onde dont les lignes neutres sont à 45 ° de la direction de polarisation rectiligne du champ incident.

**Méthode - Obtention d'une polarisation circulaire**

- ✓ L'onde incidente est polarisée rectilignement
- ✓ On place une lame quart d'onde dont les lignes neutres font un angle de 45 ° avec la direction de polarisation de l'onde

Montrer que l'onde à la sortie de la lame est polarisée circulairement

## 2. Effet de la reflexion sur une onde polarisée




On considère un dioptre séparant les indices $n_1$ et $n_2$.
On peut décomposer une onde de polarisation quelconque en deux composantes orthogonales :

- ✓ $\overrightarrow{E_{//}}$ composante parallèle au plan d'incidence
- ✓ $\overrightarrow{E_{\perp}}$ composante orthogonale au plan d'incidence

**incidence de Brewster**

Pour une onde incidente rectiligne polarisée parallèlement au plan d'incidence, il existe un angle d'incidence $i_B$ nommée incidence de Brewster, tel **qu'il n'y aura pas de rayon réfléchi**.

L'étude théorique H.P. fournit la relation $tan i_B = \dfrac{n_2}{n_1}$

## VI. Analyse d'une lumière polarisée