

Dynamique en référentiel non galiléen

PC Lycée Dupuy de Lôme

Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal}

Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal}

Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Deux éléments contradictoires au choix d'un référentiel

- La trajectoire doit être décrite la plus simplement possible
- Les lois de Newton sont valables dans les référentiels galiléens

Étude dans un référentiel non galiléen

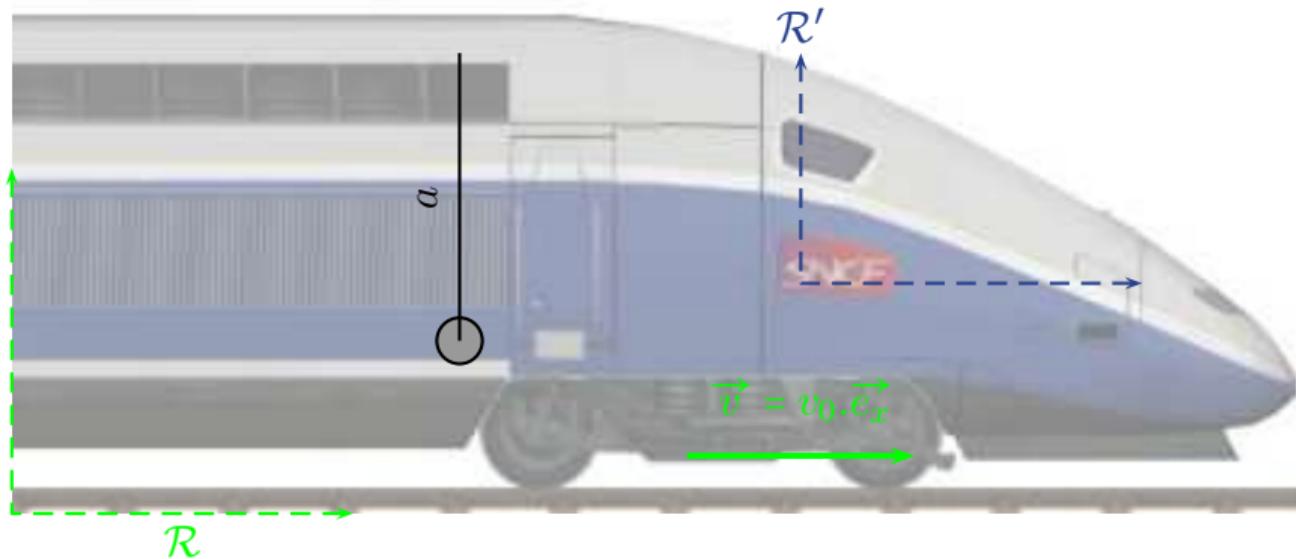
On va traduire les équations fondamentales de la dynamique pour une application dans un référentiel non galiléen.

Pseudo forces

Problématique

Référentiel en
translation dans \mathcal{R}_{gal} Référentiel en
rotation dans \mathcal{R}_{gal} Bilan de l'étude
dans \mathcal{R}' Dynamique
Terrestre

Vitesse stabilisée



Mécanique

E. Ouvrard

Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal}

Exemple

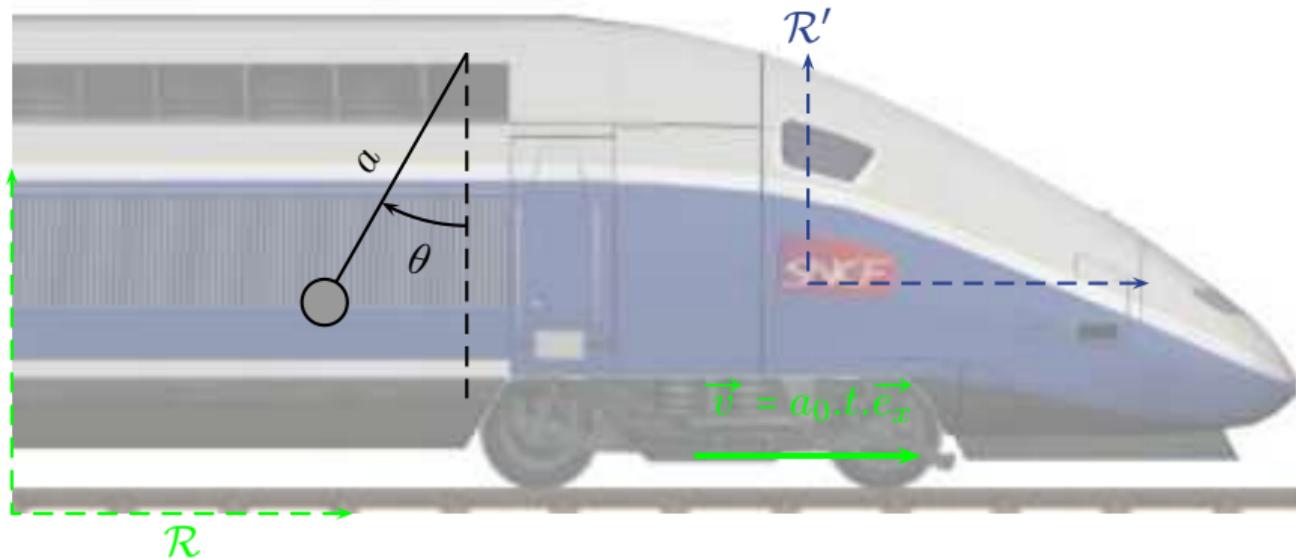
Force d'inertie d'entraînement

Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal}

Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

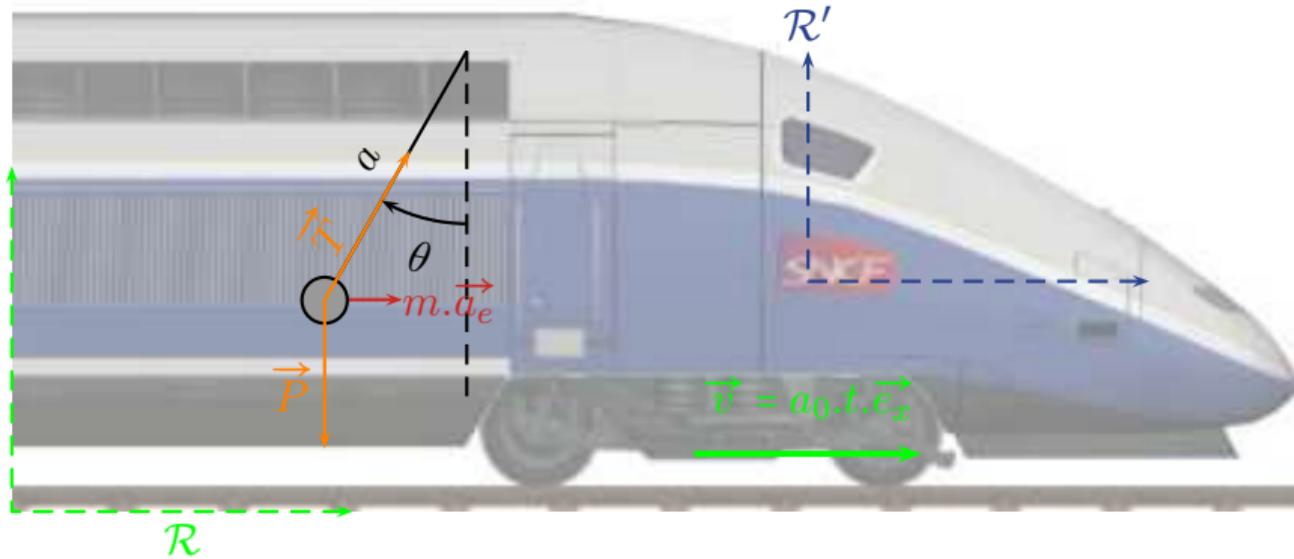
Phase d'accélération uniforme



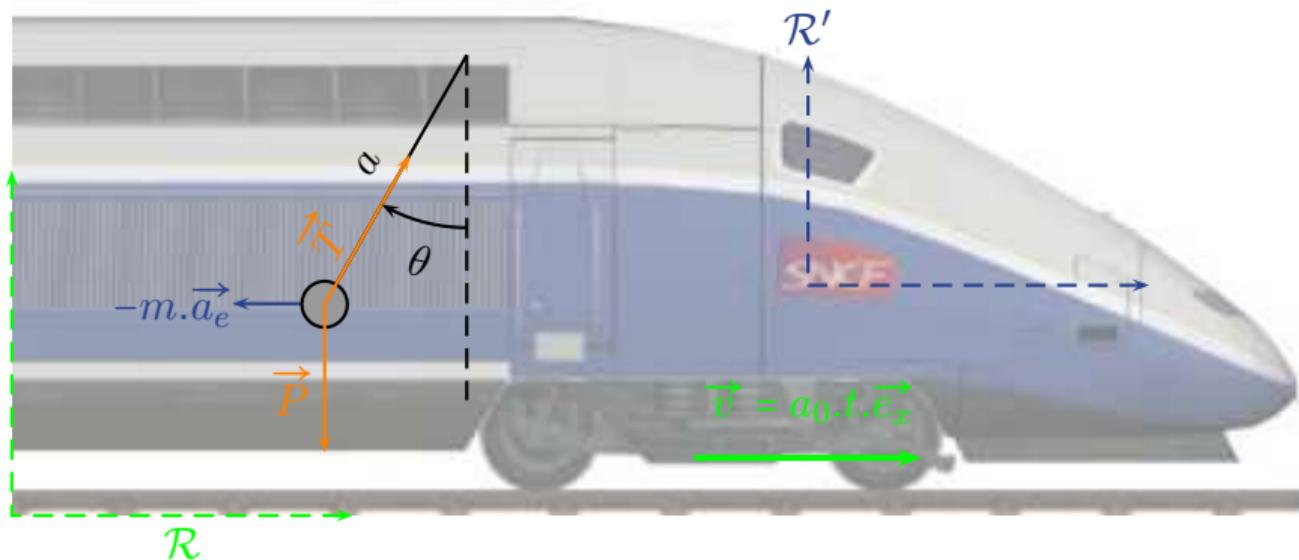
Un observateur lié au train perçoit le pendule à l'équilibre. Il peut mesurer θ , α et connaît le champ de pesanteur g . En déduire a_0 par les lois :

- de la quantité de mouvement
- du moment cinétique

Étude dans le référentiel \mathcal{R}



Étude dans le référentiel \mathcal{R}'



Le caractère non galiléen du référentiel est perçu dans ce référentiel comme l'action d'une force supplémentaire sur le système étudié.

On note \vec{R}_{ext} la résultante des forces extérieures appliquées au système étudié

$$m \cdot \vec{a}(M, \mathcal{R}) = \vec{R}_{ext}$$

On note \vec{R}_{ext} la résultante des forces extérieures appliquées au système étudié

$$m \cdot \vec{a}(M, \mathcal{R}) = \vec{R}_{ext}$$

$$m \cdot \left[\vec{a}(M, \mathcal{R}') + \vec{a}_e + \underbrace{\vec{a}_c}_{=\vec{0}} \right] = \vec{R}_{ext}$$

On note \vec{R}_{ext} la résultante des forces extérieures appliquées au système étudié

$$m. \left[\vec{a}(M, \mathcal{R}') + \vec{a}_e + \underbrace{\vec{a}_c}_{=\vec{0}} \right] = \vec{R}_{ext}$$

$$m. \vec{a}(M, \mathcal{R}') = \vec{R}_{ext} - \underbrace{m. \vec{a}_e}_{+\vec{f}_{ie}}$$

On note \vec{R}_{ext} la résultante des forces extérieures appliquées au système étudié

$$m. \left[\vec{a}(M, \mathcal{R}') + \vec{a}_e + \underbrace{\vec{a}_c}_{=\vec{0}} \right] = \vec{R}_{ext}$$

$$m. \vec{a}(M, \mathcal{R}') = \vec{R}_{ext} \underbrace{- m. \vec{a}_e}_{+\vec{f}_{ie}}$$

pseudo-forces

Les lois de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie cinétique appliquées dans un référentiel non galiléen en translation de \mathcal{R}_{gal} font apparaître un terme assimilable à une force



Pseudo-force d'inertie d'entrainement:

$$\vec{f}_{ie} = -m. \vec{a}_e$$

Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal}

Exemple

Force d'inertie d'entrainement

Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal}

Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Illustration de la pseudo-force de Coriolis

Pendule de Foucault

Mécanique

E. Ouvrard

Pseudo forces

Référentiel en
translation dans
 \mathcal{R}_{gal}

Référentiel en
rotation dans
 \mathcal{R}_{gal}

Exemple

Bilan de l'étude
dans \mathcal{R}'

Dynamique
Terrestre

Pseudo forces

Référentiel en
translation dans
 \mathcal{R}_{gal}

Référentiel en
rotation dans
 \mathcal{R}_{gal}

Exemple

Bilan de l'étude
dans \mathcal{R}'

Dynamique
Terrestre

Pseudo forces

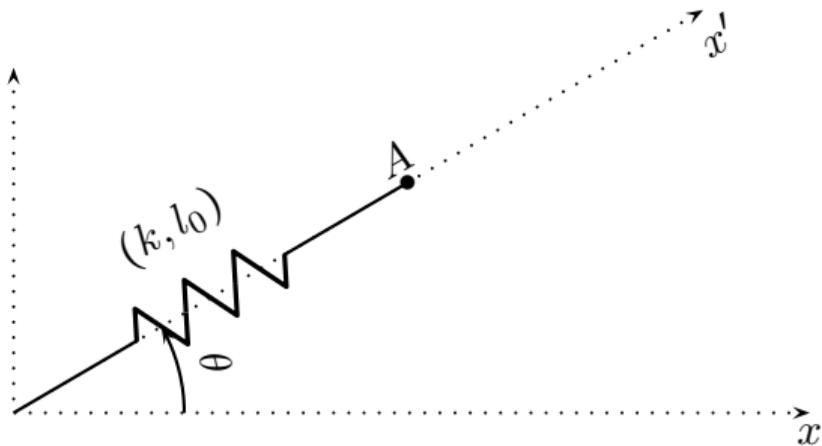
Référentiel en
translation dans
 \mathcal{R}_{gal}

Référentiel en
rotation dans
 \mathcal{R}_{gal}

Exemple

Bilan de l'étude
dans \mathcal{R}'

Dynamique
Terrestre



- L'étude se fait dans le plan horizontal
- $\dot{\theta} = \omega = C^{te}$

Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal} Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal}

Exemple

Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Forces d'inertie

Dans un référentiel \mathcal{R}' non galiléen tout se passe comme si le système était étudié dans un référentiel galiléen et subissait en plus des actions extérieures les pseudo-forces d'inertie



d'entraînement: $\vec{f}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_e$



$$\vec{f}_{ic} = -m \cdot \vec{a}_c$$

Force axifuge

Il s'agit également de la force centrifuge. Elle correspond à la force d'inertie d'entraînement dans le cas d'un référentiel \mathcal{R}' en rotation dans le référentiel galiléen.

Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal} Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal} Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Forces d'inerties

Lois dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Les lois dans \mathcal{R}' :



Loi de la quantité de mouvement:

$$m \cdot \vec{a}(M, \mathcal{R}') = \vec{R}_{ext} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$



Loi du moment cinétique:

$$m \cdot \left(\frac{d\vec{L}(O', \mathcal{R}')}{dt} \right) = \mathcal{M}(O', \vec{R}_{ext}) + \mathcal{M}(O', \vec{f}_{ie}) + \mathcal{M}(O', \vec{f}_{ic})$$



de l'énergie cinétique:

$$dE_c(M, \mathcal{R}') = \delta W(\vec{R}_{ext}, \mathcal{R}') + \delta W(\vec{f}_{ie}, \mathcal{R}') + \underbrace{\delta W(\vec{f}_{ic}, \mathcal{R}')}_{=0}$$

Pseudo forces

Référentiel en
translation dans
 \mathcal{R}_{gal}

Référentiel en
rotation dans
 \mathcal{R}_{gal}

Bilan de l'étude
dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Définition

Valeur de ω_T

Force d'inertie d'ent.

Champ de pesanteur

Étude dynamique

Les échelles de distance et temps ne sont pas respectées dans cette animation

Il faut considérer 3 référentiels :

- Le référentiel de **Copernic** d'origine le centre du soleil avec les axes dirigés vers 3 étoiles fixes et le référentiel Galiléen de référence
- Le référentiel **géocentrique** d'origine le centre de la Terre est en translation par rapport au référentiel de Copernic
- Le référentiel **Terrestre** est en rotation uniforme dans le référentiel de Copernic.

Référentiel Terrestre

Le référentiel Terrestre est en rotation uniforme dans le référentiel géocentrique

Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal}

Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal}

Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Définition

Valeur de ω_T

Force d'inertie d'ent.

Champ de pesanteur

Étude dynamique



Dans la base $B(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$\vec{\Omega}$

Vitesse angulaire de rotation

En 365,25 jours, la Terre effectue 366,35 rotations dans le référentiel géocentrique

$$\omega_T = \frac{366,25}{365,25} \frac{2\pi}{86400} \simeq \frac{2\pi}{86400} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$



Dans la base $B(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{\Omega} \begin{vmatrix} 0 \\ \omega_T \cdot \cos \lambda \\ \omega_T \cdot \sin \lambda \end{vmatrix}$$

Vitesse angulaire de rotation

En 365,25 jours, la Terre effectue 366,35 rotations dans le référentiel géocentrique

$$\omega_T = \frac{366,25}{365,25} \frac{2\pi}{86400} \simeq \frac{2\pi}{86400} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Définition

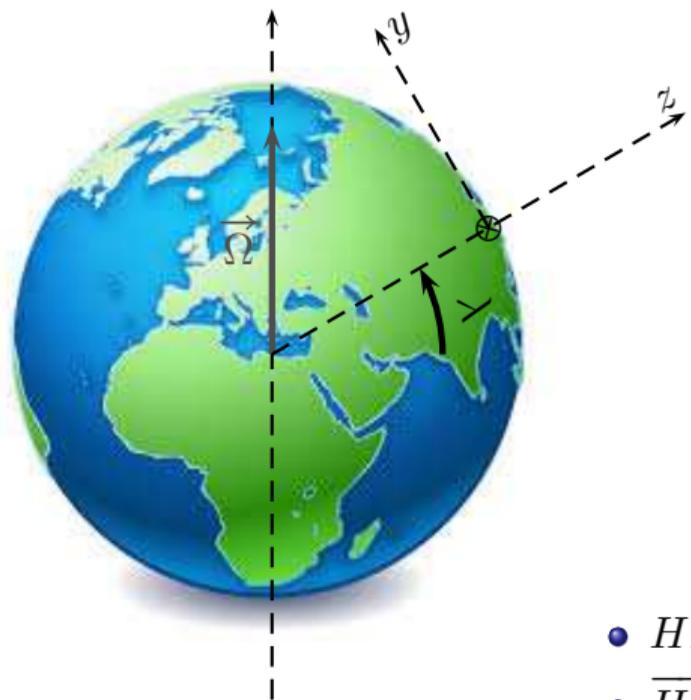
Valeur de ω_T

Force d'inertie d'ent.

Champ de pesanteur

Étude dynamique

$$|\vec{OM}| \ll |\vec{HO}| \implies \vec{HM} \equiv \vec{HO}$$



- $HM =$
- $\vec{HM} = HM \cdot (\quad \cdot \vec{e}_y \quad \quad \cdot \vec{e}_z)$



Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Définition

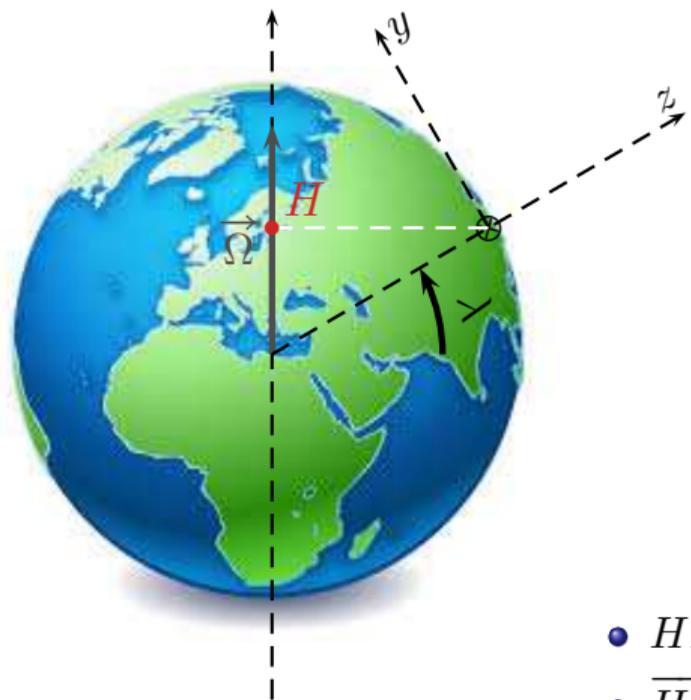
Valeur de ω_T

Force d'inertie d'ent.

Champ de pesanteur

Étude dynamique

$$|\vec{OM}| \ll |\vec{HO}| \implies \vec{HM} \equiv \vec{HO}$$



- $HM =$
- $\vec{HM} = HM \cdot (\quad \cdot \vec{e}_y \quad \quad \cdot \vec{e}_z)$



Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal} Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal} Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Définition

Valeur de ω_T

Force d'inertie d'ent.

Champ de pesanteur

Étude dynamique

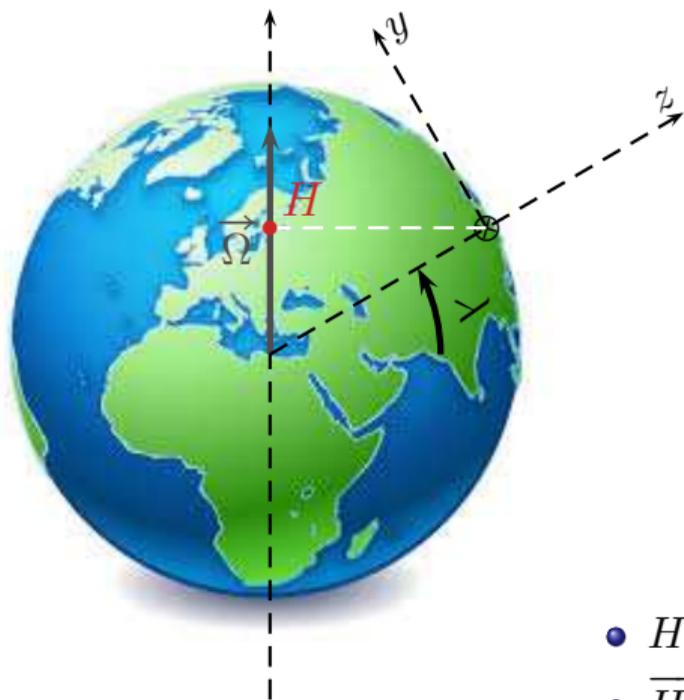
$$|\overrightarrow{OM}| \ll |\overrightarrow{HO}| \implies \overrightarrow{HM} \equiv \overrightarrow{HO}$$



- $HM = R_T \cdot \cos \lambda$
- $\overrightarrow{HM} = HM \cdot (-\sin \lambda \cdot \vec{e}_y + \cos \lambda \cdot \vec{e}_z)$



$$|\overrightarrow{OM}| \ll |\overrightarrow{HO}| \implies \overrightarrow{HM} \equiv \overrightarrow{HO}$$



- $HM = R_T \cdot \cos \lambda$
- $\overrightarrow{HM} = HM \cdot (-\sin \lambda \cdot \vec{e}_y + \cos \lambda \cdot \vec{e}_z)$

$$\triangleleft \vec{f}_{ie} = m \cdot R_T \cdot \omega_T \cdot (-\sin \lambda \cdot \cos \lambda \cdot \vec{e}_y + \cos^2 \lambda \cdot \vec{e}_z)$$

Poids d'un corps

On définit le poids \vec{P} associé à une masse m comme l'opposé de la tension du fil retenant la masse à l'équilibre dans le référentiel terrestre, le référentiel géocentrique étant supposé galiléen.

Champ de pesanteur

On définit un champ de forces \vec{g} en dynamique terrestre tel que, en tout point M à la surface de la terre,



$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$



Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal} Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal} Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Champ de pesanteur

Définition

Expression

Verticale

Étude dynamique

Le pendule est étudié dans le référentiel Terrestre non galiléen, le référentiel géocentrique étant supposé galiléen.

- Force d'inertie d'ent. : $\vec{f}_{ie} = m \cdot \omega_T^2 \cdot R_T \cdot \cos \lambda (-\sin \lambda \cdot \vec{e}_y + \cos \lambda \cdot \vec{e}_z)$
- Force de gravitation : $\vec{F}_{grav} =$
- D'après la définition du poids, $\vec{P} =$

champ de pesanteur



Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal}

Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal}

Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Champ de pesanteur

Définition

Expression

Verticale

Étude dynamique

Le pendule est étudié dans le référentiel Terrestre non galiléen, le référentiel géocentrique étant supposé galiléen.

- Force d'inertie d'ent. : $\vec{f}_{ie} = m \cdot \omega_T^2 \cdot R_T \cdot \cos \lambda \left(-\sin \lambda \cdot \vec{e}_y + \cos \lambda \cdot \vec{e}_z \right)$
- Force de gravitation : $\vec{F}_{grav} = \frac{-G \cdot m \cdot M_T}{R_T^2} \cdot \vec{e}_z$
- D'après la définition du poids, $\vec{P} = \vec{F}_{grav} + \vec{f}_{ie}$

champ de pesanteur



Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal} Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal} Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Champ de pesanteur

Définition

Expression

Verticale

Étude dynamique

Le pendule est étudié dans le référentiel Terrestre non galiléen, le référentiel géocentrique étant supposé galiléen.

- Force d'inertie d'ent. : $\vec{f}_{ie} = m.\omega_T^2.R_T.\cos\lambda(-\sin\lambda.\vec{e}_y + \cos\lambda.\vec{e}_z)$
- Force de gravitation : $\vec{F}_{grav} = \frac{-G.m.M_T}{R_T^2}.\vec{e}_z$
- D'après la définition du poids, $\vec{P} = \vec{F}_{grav} + \vec{f}_{ie}$

champ de pesanteur

$$\vec{g} = -\omega_T^2.R_T.\cos\lambda.\sin\lambda.\vec{e}_y - \left(\frac{G.M_T}{R_T^2} - \omega_T^2.R_T.\cos^2\lambda.\vec{e}_z \right)$$

Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal} Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal} Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Champ de pesanteur

Définition

Expression

Verticale

Étude dynamique

Le pendule est étudié dans le référentiel Terrestre non galiléen, le référentiel géocentrique étant supposé galiléen.

champ de pesanteur

$$\vec{g} = -\omega_T^2 \cdot R_T \cdot \cos\lambda \cdot \sin\lambda \cdot \vec{e}_y - \left(\frac{G \cdot M_T}{R_T^2} - \omega_T^2 \cdot R_T \cdot \cos^2\lambda \right) \cdot \vec{e}_z$$

Or $\frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \simeq 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ et $\omega_T^2 \cdot R_T \simeq 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$ donc

$$\vec{g} \simeq -\omega_T^2 \cdot R_T \cdot \cos\lambda \cdot \sin\lambda \cdot \vec{e}_y - \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \vec{e}_z$$

Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal}

Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal}

Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Champ de pesanteur

Définition

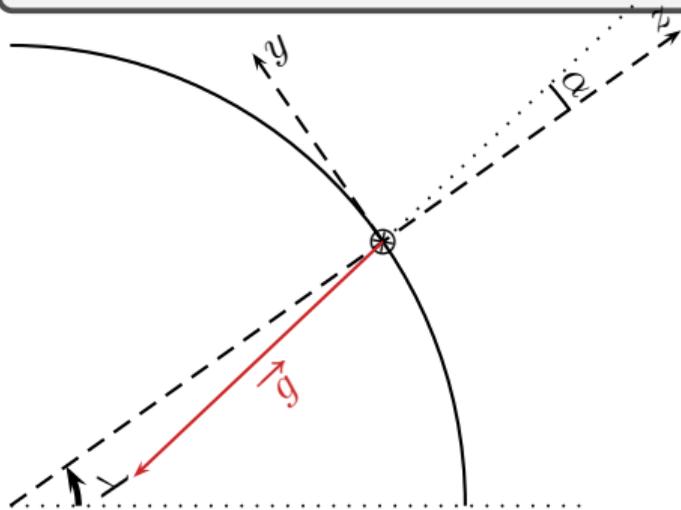
Expression

Verticale

Étude dynamique

Verticale

La direction verticale est donnée par la direction du champ de pesanteur.



On cherche à exprimer α l'angle entre la direction radiale et la verticale

$$\tan \alpha = \left| \frac{\vec{g} \cdot \vec{y}}{\vec{g} \cdot \vec{R}} \right| =$$

Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal} Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal} Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Champ de pesanteur

Définition

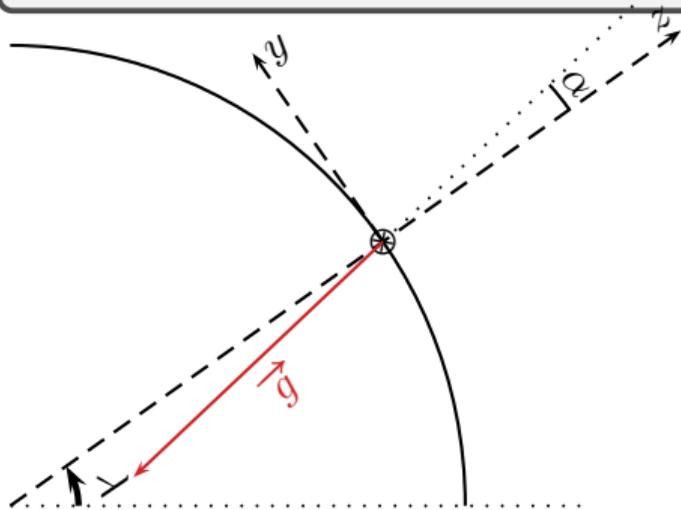
Expression

Verticale

Étude dynamique

Verticale

La direction verticale est donnée par la direction du champ de pesanteur.



On cherche à exprimer α l'angle entre la direction radiale et la verticale

$$\tan \alpha = \left| \frac{\vec{g} \cdot \vec{e}_y}{\vec{g} \cdot \vec{e}_z} \right| =$$

Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal} Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal} Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Champ de pesanteur

Définition

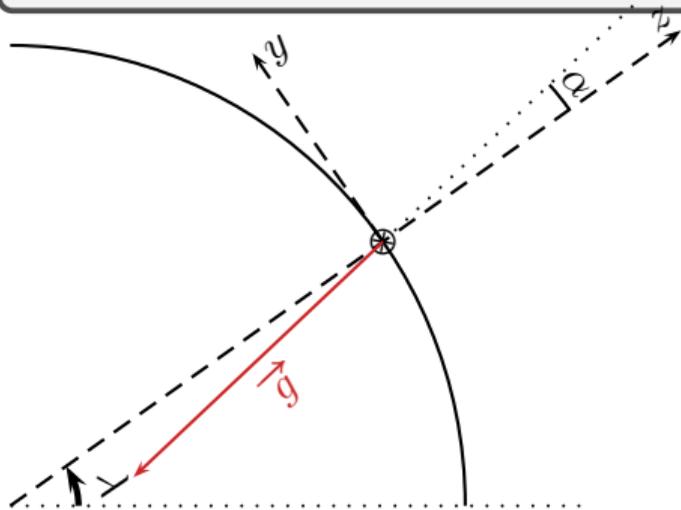
Expression

Verticale

Étude dynamique

Verticale

La direction verticale est donnée par la direction du champ de pesanteur.



On cherche à exprimer α l'angle entre la direction radiale et la verticale

$$\tan \alpha = \left| \frac{\vec{g} \cdot \vec{e}_y}{\vec{g} \cdot \vec{e}_z} \right| = \frac{\omega_T^2 \cdot R_T^3}{2 \cdot G \cdot M} \cdot \sin(2 \cdot \lambda)$$

Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal} Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal} Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Champ de pesanteur

Définition

Expression

Verticale

Étude dynamique

PFD dans le référentiel Terrestre

La force d'entraînement est déjà prise en compte dans le poids



$$m \cdot \vec{a}(M, \mathcal{R}_T) = \vec{P} + \vec{R}_{ext} + \vec{f}_{ic}$$

\vec{R}_{ext} : forces appliquées au système autres que le poids

Sauf cas particuliers, on négligera la force d'inertie de Coriolis dans l'étude des systèmes en dynamique Terrestre.

Pseudo forces

Référentiel en translation dans \mathcal{R}_{gal} Référentiel en rotation dans \mathcal{R}_{gal} Bilan de l'étude dans \mathcal{R}'

Dynamique Terrestre

Référentiel Terrestre

Champ de pesanteur

Étude dynamique

L'effet de la force de Coriolis permet d'expliquer

- La formation des dépressions
- La déviation vers l'est des corps en chute libre