

# Cinématique et changement de référentiel

PC Lycée Dupuy de Lôme

## Référentiels

Intérêt de définir  
plusieurs  
référentiels

Caractériser le  
mouvement relatif  
de deux référentiels

Loi de composition  
des vitesses

Lois de  
composition des  
accélérations

Bilan

La trajectoire d'un point est une notion qui dépend d'un observateur. On passe donc d'un repère à un référentiel en ajoutant cette notion d'observateur (muni d'une horloge).

## Définir un référentiel

Un référentiel doit se définir par

- Une origine  $O$
- Trois directions orthogonales caractérisées par trois axes orientés
- Une horloge

L'origine et le système d'axes constituent un repère.

## base de projection

Le choix d'une base de projection est à priori indépendant du référentiel. Si les directions données par les vecteurs unitaires de la base ne sont pas fixes par rapport aux axes du référentiel, la base sera dite mobile dans ce référentiel.

### Référentiels

Intérêt de définir plusieurs référentiels

Caractériser le mouvement relatif de deux référentiels

Loi de composition des vitesses

Lois de composition des accélérations

Bilan

## choix du référentiel

On choisit un référentiel en fonction de la facilité à décrire la trajectoire du point étudié dans ce référentiel.

Cependant, on verra que les études dynamiques des systèmes ne peuvent se faire que dans une classe bien particulière de référentiels : les référentiels galiléens.

On doit être capable d'étudier un système dans un référentiel et d'écrire ses grandeurs cinématiques dans un autre référentiel.

On va travailler avec deux référentiels

- $\mathcal{R}(O, OX, OY, OZ)$  et la base fixe dans  $\mathcal{R} : B(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$
- $\mathcal{R}'(O', O'X, O'Y, O'Z)$  et la base fixe dans  $\mathcal{R}' : B'(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$

Référentiels

Intérêt de définir  
plusieurs  
référentiels

Caractériser le  
mouvement relatif  
de deux référentiels

Translation de référentiels

Rotation des référentiels

Loi de composition  
des vitesses

Lois de  
composition des  
accélérationes

Bilan

## Référentiels en translation

Deux référentiels sont dits en translation si les axes liés aux référentiel  $\mathcal{R}'$  ont des directions fixes vues du référentiel  $\mathcal{R}$ .

Selon le type de trajectoire de  $O'$  dans  $\mathcal{R}$ , une translation pourra être qualifiée de :

- Rectiligne si  $O'$  a un mouvement de translation dans  $\mathcal{R}$
- Circulaire si  $O'$  a un mouvement de rotation dans  $\mathcal{R}$

Référentiels

Intérêt de définir  
plusieurs  
référentiels

Caractériser le  
mouvement relatif  
de deux référentiels

Translation de référentiels

Rotation des référentiels

Loi de composition  
des vitesses

Lois de  
composition des  
accélérations

Bilan

## Référentiels en rotation autour d'un axe fixe

Deux référentiels sont dits en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe si  $\mathcal{R}'$  ont des directions fixes vues du référentiel  $\mathcal{R}$

- Leurs origines sont commune
- L'axe  $\Delta$  est de direction fixe dans les deux référentiels.

On notera le plus souvent  $OZ$  l'axe  $\Delta$  de rotation et  $\theta = (OX, OX')$  l'angle de rotation.

## Vecteur rotation instantanée

Dans le cas d'une rotation uniforme de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  autour de  $OZ$  avec une vitesse angulaire  $\omega = \dot{\theta}$ ,

$$\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{u}_z$$

[Référentiels](#)[Intérêt de définir plusieurs référentiels](#)[Caractériser le mouvement relatif de deux référentiels](#)[Translation de référentiels](#)[Rotation des référentiels](#)[Dérivation en base mobile](#)[Loi de composition des vitesses](#)[Lois de composition des accélérations](#)[Bilan](#)

Si les deux référentiels sont en rotation, alors un vecteur de direction fixe pour l'observateur lié à  $\mathcal{R}'$  pourra être de direction mobile pour l'observateur lié à  $\mathcal{R}$ . Cela se traduit mathématiquement par les relations

$$\left( \frac{d\vec{u}'_x}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}'_y \quad \left( \frac{d\vec{u}'_y}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \cdot \vec{u}'_x$$

Référentiels

Intérêt de définir  
plusieurs  
référentielsCaractériser le  
mouvement relatif  
de deux référentiels

Translation de référentiels

Rotation des référentiels

Dérivation en base mobile

Loi de composition  
des vitessesLois de  
composition des  
accélérationns

Bilan

$\xrightarrow{\text{vert}} : \text{Vitesse du point coïncident } P$   
dans  $\mathcal{R}$

$\xrightarrow{\text{bleu}} : \text{Vitesse de la valve dans } \mathcal{R}'$

$\xrightarrow{\text{rouge}} : \text{Vitesse de } M \text{ dans } \mathcal{R}$

## Point coïncident

$P$  sera le point coïncident au point  $M$  à l'instant  $t$ , alors

- $P$  est confondu au point  $M$  à l'instant  $t$
- $P$  est immobile dans  $\mathcal{R}'$

On nomme vitesse d'entraînement la vitesse du point coïncident dans  $\mathcal{R}$

$\xrightarrow{\text{vert}} : \text{Vitesse du point coïncident } P$   
dans  $\mathcal{R}$

$\xrightarrow{\text{bleu}} : \text{Vitesse de la valve dans } \mathcal{R}'$

$\xrightarrow{\text{rouge}} : \text{Vitesse de } M \text{ dans } \mathcal{R}$

## Loi de composition des vitesses

$$\vec{v}(M, \mathcal{R}) = \vec{v}(M, \mathcal{R}') + \vec{v}(P, \mathcal{R})$$

Vitesse absolue = Vitesse relative + Vitesse d'entraînement

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

Le point coïncident étant considéré immobile à l'instant  $t$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , sa vitesse dans  $\mathcal{R}$  est imposée par la translation de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$ .

Or si on imagine le référentiel  $\mathcal{R}'$  comme un solide, tous les points de ce solide auront dans  $\mathcal{R}$  la même vitesse

### Vitesse d'entraînement pour $\mathcal{R}'$ en translation

La vitesse d'entraînement correspond à la vitesse de l'origine du référentiel mobile.

$$\vec{v}_e = \vec{v}(O', \mathcal{R})$$

Référentiels

Intérêt de définir plusieurs référentiels

Caractériser le mouvement relatif de deux référentiels

Loi de composition des vitesses

Principe de composition des vitesses

Cas d'un référentiel en translation

Cas d'un référentiel en rotation

Lois de composition des accélérations

Bilan

Le point coïncident étant considéré immobile à l'instant  $t$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , sa vitesse dans  $\mathcal{R}$  est imposée par la rotation de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$ .

Or si on imagine le référentiel  $\mathcal{R}'$  comme un solide, tous les points de ce solide auront dans  $\mathcal{R}$  une trajectoire circulaire.

### Vitesse d'entraînement pour $\mathcal{R}'$ en rotation

Pour une rotation du référentiel caractérisée par le vecteur rotation instantané  $\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{e}_\Delta$  :

- On travaille dans la base cylindrique  $B(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\Delta)$ .
- On nomme  $H$  le projeté orthogonal du point coïncident  $P \equiv M$  sur  $\Delta$

$$\vec{v}_e = HM \cdot \Omega \cdot \vec{e}_\theta$$

Référentiels

Intérêt de définir plusieurs référentiels

Caractériser le mouvement relatif de deux référentiels

Loi de composition des vitesses

Principe de composition des vitesses

Cas d'un référentiel en translation

Cas d'un référentiel en rotation

Lois de composition des accélérations

Bilan

## Définition des accélérations

- $\vec{a}_a$  l'accélération absolue, ou accélération de  $M$  dans  $\mathcal{R}$
- $\vec{a}_r$  l'accélération relative, ou accélération de  $M$  dans  $\mathcal{R}'$
- $\vec{a}_e$  l'accélération d'entraînement, ou accélération du point coïncident  $P$  dans  $\mathcal{R}$  :  $\vec{a}_e = \vec{a}(P, \mathcal{R})$

- Par définition  $\vec{a}(M, \mathcal{R}) = \left( \frac{d\vec{v}(M, \mathcal{R})}{dt} \right)_{|\mathcal{R}}$
- D'après la loi de composition des vitesses :  $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$
- Donc  $\vec{a}(M, \mathcal{R}) = \left( \frac{d\vec{v}(M, \mathcal{R}')}{dt} \right)_{|\mathcal{R}} + \left( \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{|\mathcal{R}}$

Référentiels

Intérêt de définir plusieurs référentiels

Caractériser le mouvement relatif de deux référentiels

Loi de composition des vitesses

Lois de composition des accélérations

Principe de composition des accélérations

Cas du référentiel  $\mathcal{R}'$  en translationCas du référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation uniforme

Bilan

- Dans ce cas particulier, une base fixe dans un référentiel le sera également dans l'autre. Il n'y a donc aucune différence à dériver une grandeur par rapport au temps dans un référentiel ou dans l'autre.

$$\left( \frac{d\vec{v}(M, \mathcal{R}')}{dt} \right)_{|\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{v}(M, \mathcal{R}')}{dt} \right)_{|\mathcal{R}'} = \vec{v}_r$$

- $\left( \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{|\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{v}(O', \mathcal{R})}{dt} \right)_{|\mathcal{R}} = \vec{a}(O', \mathcal{R})$

- L'accélération du point coïncident correspond à  $\vec{a}(P, \mathcal{R}) = \vec{a}(O', \mathcal{R})$

## Composition des accélérations pour $\mathcal{R}$ en translation

Dans ce cas

$$\vec{a}_e = \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$$

- Dans ce cas particulier, une base fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  sera mobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .
- Le point coïncident a un mouvement circulaire uniforme à l'instant  $t$ . On lui associe donc l'accélération  $\vec{a}_e = -\Omega^2 \cdot \overrightarrow{HM}$

En effet on considère  $HP = C^{te}$  et

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{v}(P, \mathcal{R})}{dt} = \frac{HP \cdot \Omega \cdot \vec{e}_\theta}{dt} = HP \cdot \Omega \cdot \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -HP \cdot \Omega^2 \cdot \vec{e}_r$$

- On peut d'autre part vérifier que  $\vec{a}_e \neq \left( \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$

*Il semble donc évident que la loi de composition des accélérations doit faire apparaître un nouveau terme, homogène à une accélération, dont on ne développe pas l'expression dans ce cours mais qui doit être connue.*

Référentiels

Intérêt de définir plusieurs référentiels

Caractériser le mouvement relatif de deux référentiels

Loi de composition des vitesses

Lois de composition des accélérations

Principe de composition des accélérations

Cas du référentiel  $\mathcal{R}'$  en translationCas du référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation uniforme

Bilan

- Dans ce cas particulier, une base fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  sera mobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

- Le point coïncident a un mouvement circulaire uniforme à l'instant  $t$ . On lui associe donc l'accélération  $\vec{a}_e = -\Omega^2 \cdot \overrightarrow{HM}$

En effet on considère  $HP = C^{te}$  et

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{v}(P, \mathcal{R})}{dt} = \frac{HP \cdot \Omega \cdot \vec{e}_\theta}{dt} = HP \cdot \Omega \cdot \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -HP \cdot \Omega^2 \cdot \vec{e}_r$$

- On peut d'autre part vérifier que  $\vec{a}_e \neq \left( \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$

### Composition des accélérations pour $\mathcal{R}$ en rotation uniforme

On nomme accélération de Coriolis :  $\vec{a}_c = 2 \cdot \Omega \wedge \vec{v}_r$

L'accélération d'entraînement a pour expression :  $\vec{a}_e = -\Omega^2 \cdot \overrightarrow{HM}$

Loi de composition des accélérations :  $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$

Soit  $A$  un **point fixe** du référentiel d'étude quelconque  $\mathcal{R}$  et  $M$  le point étudié.

	Loi de composition
Vitesse	$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \underbrace{\vec{v}(M \in \mathcal{R}')}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\vec{v}_e}$
Accélération	$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \underbrace{\vec{a}(M \in \mathcal{R}')}_{\vec{a}_r} + \underbrace{\vec{a}(O'/\mathcal{R}) - \omega^2 \cdot \overrightarrow{HM}}_{\vec{a}_e} + \underbrace{2 \cdot \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r}_{\vec{a}_c}$

La loi de composition pour les accélérations n'est donnée que dans le cas particulier d'une rotation uniforme par rapport à un axe de direction fixe du référentiel  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$ .

$H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation  $\Delta$  de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$

Référentiels

Intérêt de définir plusieurs référentiels

Caractériser le mouvement relatif de deux référentiels

Loi de composition des vitesses

Lois de composition des accélérations

Bilan