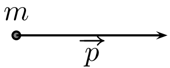
Équation de Schrödinger pour une particule libre

PC Lycée Dupuy de Lôme

Approche corpusculaire



Caractéristiques :

- Position x
- Quantité de mouvement $\overrightarrow{p} = p.\overrightarrow{e_x}$

Approche ondulatoire

Paquet d'ondes

Caractéristiques :

- Fonction d'onde $\Psi(x,t)$
- densité de probabilité de présence à l'abscisse x

Il s'agit de traduire ici la dynamique de la fonction d'onde

Quelques principes permettent de construire l'équation

- Elle doit être linéaire *(Principe de superposition)*
- Elle doit être d'ordre 1 par rapport au temps *(La connaissance de l'état initiale suffit à décrire l'évolution ultérieure)*
- Elle doit se confondre avec la théorie classique dans le domaine de validité commun

Équation de Schrödinger

La fonction d'onde Ψ d'un quanton pour un système unidimensionnel vérifie l'équation

$$i.\hbar.\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2.m}.\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x).\Psi$$

> En mécanique quantique les fonctions d'onde seront toujours des expressions complexes que l'on notera par abus d'écriture $\Psi(x,t)$ et non $\underline{\Psi}(x,t)$

Pour la lumière, une zone d'intensité lumineuse élevée peut être vue comme une zone où la probabilité d'y recevoir un photon est forte. Mais c'est également une zone l'énergie électrique associée à l'onde est élevée, donc où $|E|^2$ est élevé.
Par analogie...

densité de probabilité

$|\underline{\Psi}|^2$ représente la densité de probabilité d'existence de l'état physique du quanton.

$$\rho(M) = \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = |\underline{\Psi}(M,t)|^2$$

Pour le cas particulier unidimensionnel, on parlera plutôt de densité linéïque de probabilité

$$\rho(x) = \frac{d\mathcal{P}}{dx} = |\underline{\Psi}(x,t)|^2$$

Normalisation de la fonction d'onde

La probabilité de trouver la particule dans tout l'espace doit être égal à 1.

✍ $$\iiint_{espace} \left|\underline{\Psi}(M,t)\right|^2 .d\tau = 1$$

Pour le cas unidimensionnel :

✍ $$\int_{espace} \left|\underline{\Psi}(x,t)\right|^2 .dx = 1$$

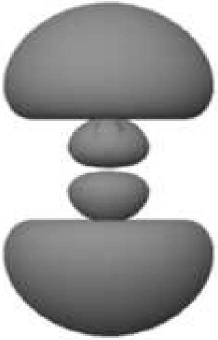
Ex : $\Psi(x,t) = A.sin\left(\frac{\pi.x.x}{L}\right).e^{\frac{-i.E.t}{\hbar}}$ $\forall 0 < x < L$ *et* $\Psi(x,t) = 0$ *sinon. Exprimer* A

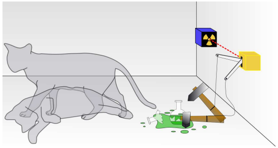
Exemple : Orbitale atomique

Orbitale atomique

L'orbitale atomique correspond à la fonction d'onde associée à un électron d'un atome.

On peut représenter une surface à l'intérieure de laquelle la probabilité de trouver l'électron est de 95% par exemple.





Principe de superposition

Si on peut imaginer plusieurs états associés au quanton, la fonction d'onde correspondra alors à une combinaison linéaire de ces états.

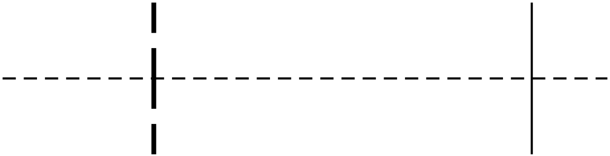
$$\underline{\Phi} = \alpha_1 . \underline{\Phi}_1 + \alpha_2 . \underline{\Phi}_2 + \ldots$$

$\underline{\Phi}$ doit être normalisée.

Exemple : Interférences et trous d'Young

On note resp. $\underline{\Phi}_1 = \Phi_1.e^{j\varphi_1}$ et $\underline{\Phi}_2 = \Phi_2.e^{j\varphi_2}$ les fonctions d'ondes associées aux quanton lorsque seule la fente F_1 ou F_2 est ouverte.

Déterminer la loi de probabilité en M lorsque les deux fentes sont ouvertes.



- Par symétrie du système, on peut proposer la fonction d'onde : $\underline{\Phi} = \underline{\alpha}.\left[\underline{\Phi}_1 + \underline{\Phi}_2\right]$
- On a donc : $\left|\underline{\Phi}\right|^2 = \alpha^2.\left[\left|\underline{\Phi}_1\right|^2 + \left|\underline{\Phi}_2\right|^2 + 2.\left|\underline{\Phi}_1\right|.\left|\underline{\Phi}_2\right|.cos\Delta\varphi\right]$

Le principe de superposition est cohérent avec l'expérience d'interférences par des trous d'Young d'un faisceau d'électrons.

Quanton libre

Un quanton est libre s'il n'est soumis à aucun champ de force.

Le potentiel $V(x)$ sera alors constant. On le choisira nul.

✍ **L'énergie d'un quanton libre est** $E = \frac{1}{2}.m.v^2$

On propose une solution sous la forme : $\Psi(x,t) = \Phi(x).e^{-i.\omega.t}$

Onde de de Broglie

On associe à tout quanton libre une onde plane "pilote" de longueur d'onde dite de de Broglie à laquelle on associe la fonction d'onde

$$\Psi(x,t) = \Phi(x).e^{-i.\omega.t}$$

A la fréquence $\nu = \dfrac{\omega}{2.\pi}$ est associée l'énergie

$$E = h.\nu = \hbar.\omega \text{ avec } \hbar = \frac{h}{2.\pi}$$

- $h = 6,62.10^{-34}\ J.s$: Constante de Planck
- Une particule libre non relativiste aura alors une énergie $E = \dfrac{1}{2}.m.v^2$

- La forme générale de la solution est $\Psi(x,t) = \Phi(x).e^{-i.\omega.t}$
- Elle vérifie l'équation de Schrödinger avec $V(x) = 0$: $\ddot{\Phi}(x) = \dfrac{2.m.E}{\hbar^2}.\Phi(x) = 0$
- On note $k = \dfrac{\sqrt{2.m.E}}{\hbar}$
- Les solutions sont alors de la forme

$$\Psi(x,t) = \left[A_1.e^{i.k.x} + A_2.e^{-i.k.x}\right].e^{\frac{-i.E.t}{\hbar}}$$

Il s'agit d'une combinaison d'OPPH de la forme $\Psi(x,t) = \Phi_0.e^{(\pm k.x - .\omega.t)}$.
Le nombre d'onde k vérifie la relation de dispersion

$$k = \frac{\sqrt{2.m.E}}{\hbar}$$

État stationnaire

La densité de probabilité associée à cette onde est indépendante du temps. Il s'agit donc d'un état stationnaire.

- A cette fonction d'onde est associée une longueur d'onde λ telle que

$$\lambda = \frac{2.\pi}{k} = \frac{2.\pi.\hbar}{\sqrt{2.m.E}}$$

- Pour la particule libre non relativiste :

$$E = \frac{1}{2}.m.v^2$$

Longueur d'onde de de Broglie

A une particule libre de quantité de mouvement $\overrightarrow{p} = p.\overrightarrow{e_x}$ est associée une onde plane progressive harmonique de longueur d'onde

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

- Par définition $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$
- Alors $v_\varphi = \dfrac{\omega.\hbar}{\sqrt{2.m.E}} = \dfrac{h.\nu}{\sqrt{2.m.E}} = \dfrac{E}{\sqrt{2.m.E}} = \dfrac{E}{2.m.E}$
- Pour la particule libre non relativiste :

$$v_\varphi = \frac{v}{2}$$

Une onde de De Broglie ne peut donc pas caractériser seule une particule d'énergie E car sa vitesse de propagation ne correspond pas à la vitesse de déplacement de la particule associée.

Que retient-on des études précédentes :

- **Interférences d'un faisceau d'électrons :** Il n'est pas possible de prévoir avec certitude la trajectoire d'une particule. La position et la vitesse d'une particule ne peuvent être déterminées simultanément avec précision.
- **OPPH pilote associée à une particule :** l'hypothèse d'une OPPH implique une répartition dans tout l'espace de la particule. La connaissance exacte de p implique donc l'incertitude totale sur la position de la particule.

Inégalité d'Heisenberg

L'incertitude sur la position Δx ainsi que l'incertitude sur la quantité de mouvement Δp (ou sur le nombre d'onde Δk sont reliés par l'inégalité :

$$\Delta x . \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2} \quad \textbf{ou} \quad \Delta x . \Delta k \geqslant \frac{1}{2}$$

A un quanton sera donc associé un paquet d'onde.

Cette égalité est à rapprocher de l'étude des paquets d'onde déjà effectué en physique des

Vitesse de groupe

La vitesse de groupe $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ d'un paquet d'onde associé à un quanton s'identifie à la vitesse de ce quanton.

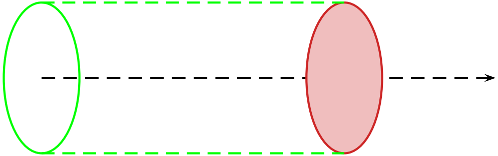
✍ $$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(p).e^{i\frac{(p.x-E(p).t)}{\hbar}}.dp$$

En effet, en dynamique non relativiste : $v_g = \dfrac{d\omega}{dk} = \dfrac{d(\hbar.\omega)}{d(\hbar.k)} = \dfrac{dE}{dp} = \dfrac{2.\frac{1}{2}.m.2.v.dv}{m.dv} = v$

Densité de courant de probabilité

On définit la densité de courant de probabilité $\overrightarrow{J}$ comme la probabilité qu'une particule traverse une surface unitaire pendant 1 seconde.

Bilan sur une durée dt :



- a probabilité de trouver la particule dans le volume $v_g.dt.S$ s'écrit $d\mathcal{P} = |\Psi|^2 .S.v_g.dt$ or $v_g = \dfrac{k.\hbar}{m}$
- la probabilité que cette particule traverse la section s'écrit en fonction de $\overrightarrow{J}$: $d\mathcal{P} = \iint_S \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{dS}.dt$

Densité de courant de probabilité

On définit la densité de courant de probabilité $\overrightarrow{J}$ comme la probabilité qu'une particule traverse une surface unitaire pendant 1 seconde.

- a probabilité de trouver la particule dans le volume $v_g.dt.S$ s'écrit $d\mathcal{P} = |\Psi|^2 .S.v_g.dt$ or $v_g = \dfrac{k.\hbar}{m}$
- la probabilité que cette particule traverse la section s'écrit en fonction de $\overrightarrow{J}$: $d\mathcal{P} = \iint_S \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{dS}.dt$

Vecteur densité de courant de probabilité

✍ $$\overrightarrow{J} = |\Psi(x,t)|^2 . \frac{\hbar.\overrightarrow{k}}{m}$$

Considérons l'onde de de Broglie $\Psi(x,t) = \varphi_0.e^{i(k.x-\omega.t)}$

Alors $\overrightarrow{J} = \varphi_0^2.\dfrac{\hbar.\overrightarrow{k}}{m} = C^{te}$. Il s'agit donc d'un état stationnaire pour lequel le courant de probabilité sera indépendant du temps.

Forme générale d'une solution stationnaire

$$\Psi(x,t) = \varphi(x).e^{\frac{-i.E.t}{\hbar}}$$

Forme générale des solutions

- Dans chaque domaine où le potentiel est uniforme (et indépendant du temps), on recherche des solutions stationnaires

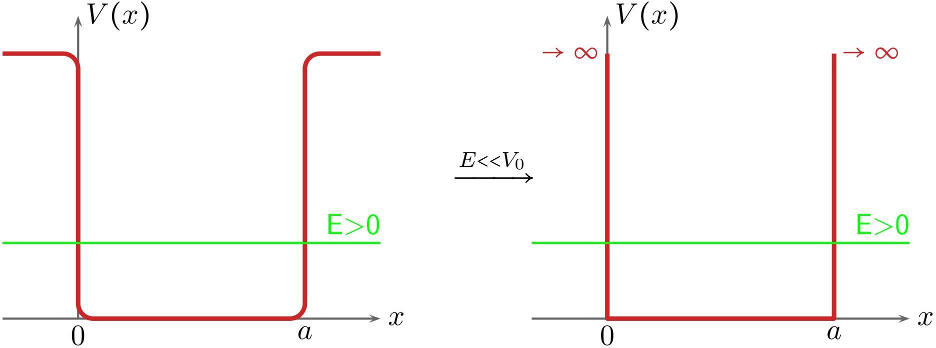
$$\Psi(x,t) = \varphi(x).e^{-i.\frac{E.t}{\hbar}}$$

- On doit vérifier en tout point la continuité de la fonction d'onde ainsi que de sa dérivée spatiale.

Équation de Schrödinger pour un état stationnaire

$\varphi(x)$ devant vérifier l'équation de Schrödinger, il en résulte

$$-\frac{\hbar^2}{2.m}.\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} + V(x).\varphi(x) = E.\varphi(x)$$



Régions interdites

Dans les régions de l'espace où le potentiel est infini, la probabilité de présence de la particule quantique est nulle.

$$\forall x \ tq \ V(x) \to \infty : \varphi(x) = 0$$

- Proposer la forme générale pour $\varphi(x) =$
- Exploiter les CAL
- En déduire les modes possibles
- Normaliser la fonction d'onde

Fonction d'onde pour un puits infini

✍ $$\Psi(|x| < a = \sqrt{\frac{2}{a}}.e^{-i.\frac{E_n}{\hbar}t}.sin\frac{n.\pi.x}{a} \quad \textbf{avec} \quad E_n = n^2.\frac{\pi^2.\hbar^2}{2.m.a^2}$$

L'énergie dans un puits de potentiel infini est donc quantifiée.

- Proposer la forme générale pour $\varphi(x) = A.coskx + B.sinkx$
- Exploiter les CAL $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$
- En déduire les modes possibles $k_n = n.\dfrac{\pi}{a}$
- Normaliser la fonction d'onde $\int_0^a |\varphi(x)|^2 .dx = 1$

Fonction d'onde pour un puits infini

✍ $$\Psi(|x| < a = \sqrt{\frac{2}{a}}.e^{-i.\frac{E_n}{\hbar}t}.sin\frac{n.\pi.x}{a} \quad \textbf{avec} \quad E_n = n^2.\frac{\pi^2.\hbar^2}{2.m.a^2}$$

L'énergie dans un puits de potentiel infini est donc quantifiée.

Similitudes...

- Les CAL imposent une quantification des nombres d'onde
- Il existe des nœuds où la densité de probabilité de présence sera nulle
- On peut voir la solution comme une superposition d'ondes planes se propageant dans les deux sens opposés

... et différences

- Les énergies possibles de la particule quantique sont quantifiées, ce n'est pas le cas pour la corde

Mode fondamental

Au vu de l'étude précédente, les modes associés à une particule sont tels que $E_n = n^2.\dfrac{\pi^2.\hbar^2}{2.m.a^2}$

Énergie minimale

Le mode fondamental correspond au niveau d'énergie minimum pour une particule quantique dans un puits infini de potentiel.

✍ $$E_{min} = \frac{\pi^2.\hbar^2}{2.m.a^2}$$

Conséquence de l'inégalité d'H.

- $\Psi_n(x,t)$ peut être décrite comme l'association de 2 OPPH se propageant
- Ces deux ondes correspondent à des $q^{té}$ de mouvement $\overrightarrow{p_n}$ et
- Pour un mode n, $\langle p_x \rangle$ =
- On a alors Δp_x =
- On calcule Δx =
- Selon l'inégalité d'Heisenberg
- Alors $E_{c,min} \geqslant$

Énergie minimale dans un puits de potentiel infini

D'après l'inégalité d'Heisenberg, toute particule quantique placée dans un puits de potentiel infini aura une énergie minimale

✍ $$E_{min} = \frac{\hbar^2}{2.m.a^2}$$

Conséquence de l'inégalité d'H.

- $\Psi_n(x,t)$ peut être décrite comme l'association de 2 OPPH se propageant en sens opposé
- Ces deux ondes correspondent à des $q^{té}$ de mouvement $\overrightarrow{p_n}$ et $-\overrightarrow{p_n}$
- Pour un mode n, $\langle p_x \rangle = 0$
- On a alors $\Delta p_x = \sqrt{\left|\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2\right|} = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}$
- On calcule $\Delta x = \dfrac{a}{2.\sqrt{3}}$ (On pourrait prendre plus grossièrement $\dfrac{a}{2}$)
- Selon l'inégalité d'Heisenberg
- Alors $E_{c,min} \geqslant \dfrac{3.\hbar^2}{2.m.a^2}$

Énergie minimale dans un puits de potentiel infini

D'après l'inégalité d'Heisenberg, toute particule quantique placée dans un puits de potentiel infini aura une énergie minimale

$$E_{min} = \frac{\hbar^2}{2.m.a^2}$$

- Un mode propre est caractérisé par sa fonction d'onde

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}.sin\frac{n.\pi.x}{a}.e^{-i.E_n.t/\hbar}$$

- A ce mode correspond une densité de probabilité de présence

$$P_n(x) = \frac{2}{a}.sin^2\frac{n.\pi.x}{a}$$

Propriétés

- La densité de probabilité de présence est indépendante du temps pour un mode propre
- La densité de probabilité de présence a les symétries du potentiel $V(x)$

Les symétries du potentiel entrainent par conséquent des propriétés de symétrie ou antisymétrie pour la fonction d'onde propre.

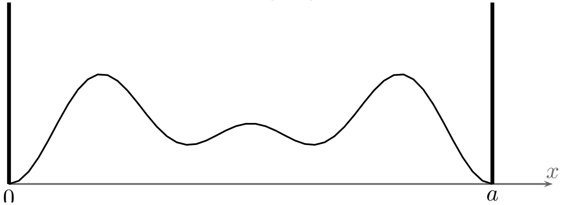
Superposition d'états stationnaires

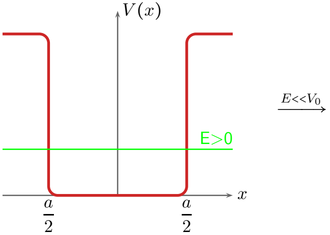
La solution générale peut être décrite comme une superposition des états stationnaires

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.\varphi_n(x).e^{-i.E_n.t/\hbar} \quad \texttt{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = 1$$

On peut alors obtenir une évolution non stationnaire.

Superposition des modes 1 et 3





États stationnaires - forme générale de la solution

- On recherche les états stationnaires pour lesquels la fonction d'onde prendra la forme

$$\Psi(x,t) = \varphi(x).e^{-i.\frac{E.t}{\hbar}}$$

- $\varphi(x)$ devant vérifier l'équation de Schrödinger, il en résulte

$$\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} + \frac{2.m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right].\varphi(x) = 0$$

- $\varphi(x)$ et $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}$ doivent être continues en tout point.

Si $E > V_0$

$$E > V_0 : \quad \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + \frac{2.m.\left[E - V_0\right]}{\hbar^2}.\varphi(x) = 0$$

- On définit $k_1 = \dfrac{\sqrt{2.m.\left(E - V_0\right)}}{\hbar}$
- La forme générale de la solution est
- On en déduit les formes des solutions dans les deux parties

Solutions progressives

Hors d'un puits de potentiel fini au niveau duquel se trouve le quanton d'énergie $E > V_0$, les solutions de la fonction d'onde propre sont des solutions progressives

$$\Psi\left(x, t\right) = A.e^{i.\left(\pm k_1.x - \frac{E.t}{\hbar}\right)}$$

La particule est donc libre de quitter le puits de potentiel. Elle se trouve dans un état de diffusion.

Si $E > V_0$

$$E > V_0 : \quad \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + \frac{2.m.\left[E - V_0\right]}{\hbar^2}.\varphi(x) = 0$$

- On définit $k_1 = \dfrac{\sqrt{2.m.\left(E - V_0\right)}}{\hbar}$
- La forme générale de la solution est $\varphi(x) = C_1.e^{i.k_1.x} + C_2.e^{-i.k_1.x}$
- On en déduit les formes des solutions dans les deux parties

Solutions progressives

Hors d'un puits de potentiel fini au niveau duquel se trouve le quanton d'énergie $E > V_0$, les solutions de la fonction d'onde propre sont des solutions progressives

$$✍ \qquad \Psi\left(x, t\right) = A.e^{i.\left(\pm k_1.x - \frac{E.t}{\hbar}\right)}$$

La particule est donc libre de quitter le puits de potentiel. Elle se trouve dans un état de diffusion.

Si $E < V_0$

$$E < V_0 : \quad \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} - \frac{2.m.\left[V_0 - E\right]}{\hbar^2}.\varphi(x) = 0$$

- On définit $K = \dfrac{\sqrt{2.m.\left(V_0 - E\right)}}{\hbar}$
- La forme générale de la solution est
- Physiquement la fonction d'onde ne peut pas tendre vers
- On en déduit les formes des solutions dans les deux parties

Solutions évanescentes

Hors d'un puits de potentiel fini au niveau duquel se trouve le quanton d'énergie $E < V_0$, les solutions de la fonction d'onde propre sont des solutions évanescentes

✍ $$\varphi\left(x \leqslant \frac{-a}{2}\right) = A.e^{K.x} \qquad \varphi\left(x \geqslant \frac{a}{2}\right) = B.e^{-K.x}$$

La particule ne peut donc pas quitter le puits de potentiel. Elle se trouve dans un état lié.

Si $E < V_0$

$$E < V_0 : \quad \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} - \frac{2.m.[V_0 - E]}{\hbar^2}.\varphi(x) = 0$$

- On définit $K = \dfrac{\sqrt{2.m.(V_0 - E)}}{\hbar}$
- La forme générale de la solution est $\varphi(x) = C_1.e^{K.x} + C_2.e^{-K.x}$
- Physiquement la fonction d'onde ne peut pas tendre vers l'infini
- On en déduit les formes des solutions dans les deux parties

Solutions évanescentes

Hors d'un puits de potentiel fini au niveau duquel se trouve le quanton d'énergie $E < V_0$, les solutions de la fonction d'onde propre sont des solutions évanescentes

✍ $$\varphi\left(x \leqslant \frac{-a}{2}\right) = A.e^{K.x} \qquad \varphi\left(x \geqslant \frac{a}{2}\right) = B.e^{-K.x}$$

La particule ne peut donc pas quitter le puits de potentiel. Elle se trouve dans un état lié.

$$\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} + \frac{2.m.E}{\hbar^2}.\varphi(x) = 0$$

Seules les conditions aux limites diffèrent du puits infini. La forme générale de la solution est identique.

Solutions dans le puits

Dans un puits de potentiel fini dans lequel est lié le quanton, les solutions de la fonction d'onde propre sont du type

✍ $$\varphi\left(x \leqslant \frac{-a}{2}\right) = C.cos\left(k.x\right) + D.sin\left(k.x\right)$$ **avec** $k = \frac{\sqrt{2.m.E}}{\hbar}$

Continuité

On exploite la continuité de $\phi(x)$ et $\dfrac{d\varphi}{dx}$ en $x = \pm\dfrac{a}{2}$

On arrive alors au système d'équations suivants :

Continuité de $\varphi(x)$

Continuité de $\dfrac{d\varphi}{dx}$

Continuité

On exploite la continuité de $\phi(x)$ et $\dfrac{d\varphi}{dx}$ en $x = \pm\dfrac{a}{2}$

On arrive alors au système d'équations suivants :

Continuité de $\varphi(x)$

$$A.e^{\frac{-K.a}{2}} = C.cos\left(\frac{k.a}{2}\right) - D.sin\left(\frac{k.a}{2}\right)$$

$$B.e^{\frac{-K.a}{2}} = C.cos\left(\frac{k.a}{2}\right) + D.sin\left(\frac{k.a}{2}\right)$$

Continuité de $\dfrac{d\varphi}{dx}$

$$A.K.e^{\frac{-K.a}{2}} = C.k.sin\left(\frac{k.a}{2}\right) + D.k.cos\left(\frac{k.a}{2}\right)$$

$$B.K.e^{\frac{-K.a}{2}} = C.k.sin\left(\frac{k.a}{2}\right) - D.k.cos\left(\frac{k.a}{2}\right)$$

Symétrie du potentiel

La symétrie de la cause engendre la symétrie des effets.
La densité de probabilité de présence $|\varphi(x)|^2$ doit donc être une fonction symétrique
$\varphi(x)$ est donc nécessairement une fonction paire ou impaire.

Modes symétriques

- Ils correspondent à $A =$ et $0 =$
- La résolution donne $\frac{K.a}{2} = \frac{k.a}{2}.tan\left(\frac{k.a}{2}\right)$

Modes antisymétriques

- Ils correspondent à $A =$ et $0 =$
- La résolution donne $\frac{K.a}{2} = -\frac{k.a}{2}.\frac{1}{tan\left(\frac{k.a}{2}\right)}$

Symétrie du potentiel

La symétrie de la cause engendre la symétrie des effets.
La densité de probabilité de présence $|\varphi(x)|^2$ doit donc être une fonction symétrique
$\varphi(x)$ est donc nécessairement une fonction paire ou impaire.

Modes symétriques

- Ils correspondent à $A = B$ et $0 = D$
- La résolution donne $\dfrac{K.a}{2} = \dfrac{k.a}{2}.tan\left(\dfrac{k.a}{2}\right)$

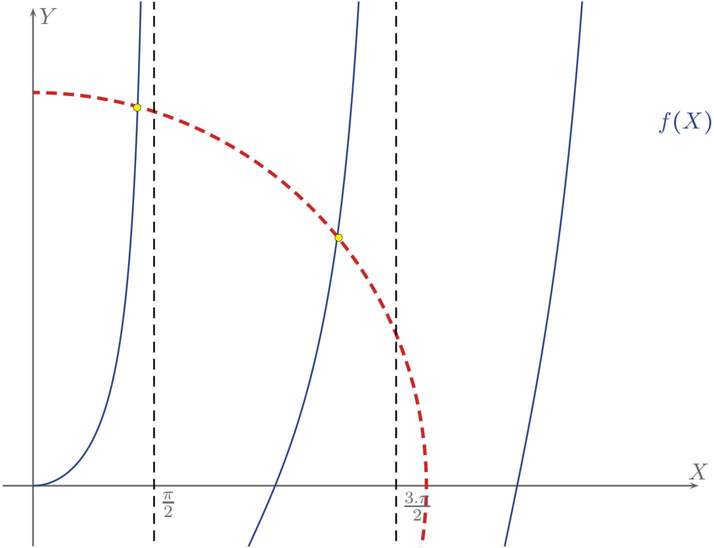
Modes antisymétriques

- Ils correspondent à $A = -B$ et $0 = C$
- La résolution donne $\dfrac{K.a}{2} = -\dfrac{k.a}{2}.\dfrac{1}{tan\left(\dfrac{k.a}{2}\right)}$

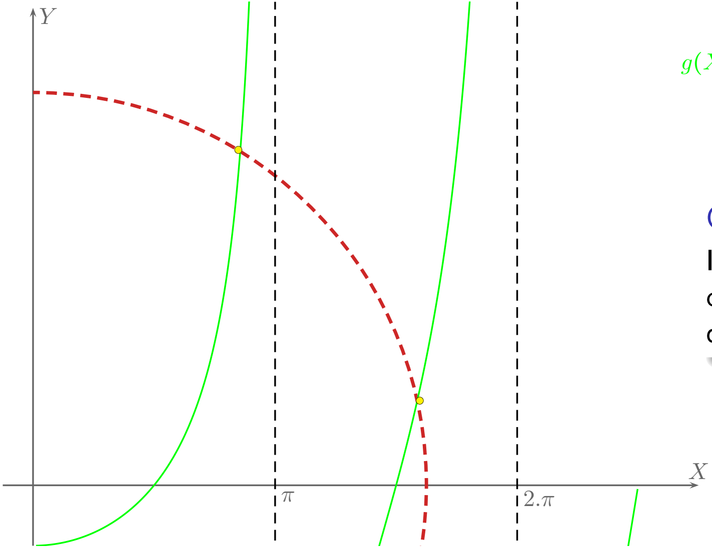
- On pose $X = \dfrac{k.a}{2}$ et $Y = \dfrac{K.a}{2}$
- $k = \dfrac{\sqrt{2.m.E}}{\hbar}$ et $K = \dfrac{\sqrt{2.m.(V_0 - E)}}{\hbar}$ donc $x^2 + y^2 = \dfrac{L^2.m.V_0}{2.\hbar^2} = R^2$
- Mode symétrique : $Y = f(X) = X.tan(X)$
- Mode antisymétrique : $Y = g(X) = \dfrac{-X}{tan(X)}$

Résolution graphique

La recherche des modes se fera par résolution graphique. On recherchera l'intersection du cercle de rayon R avec la fonction $f(X) > 0$ pour les modes symétriques ou avec la fonction $g(X) < 0$ pour les modes antisymétriques.



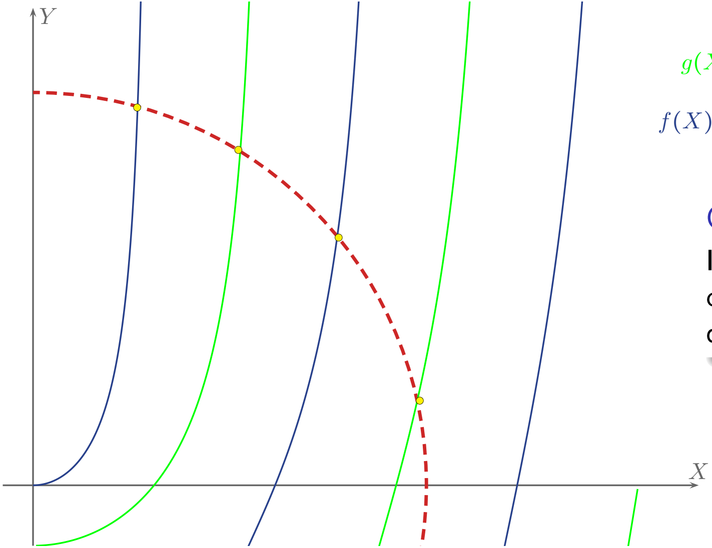
$f(X) = X.tanX$



$$g(X) = \frac{-X}{tanX}$$

Quantification

Il existe dans ce cas 4 modes correspondant à 4 valeurs quantifiées de l'énergie du quanton.



$$g(X) = \frac{-X}{tanX}$$

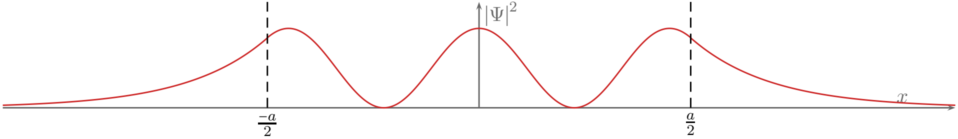
$$f(X) = X.tanX$$

Quantification

Il existe dans ce cas 4 modes correspondant à 4 valeurs quantifiées de l'énergie du quanton.

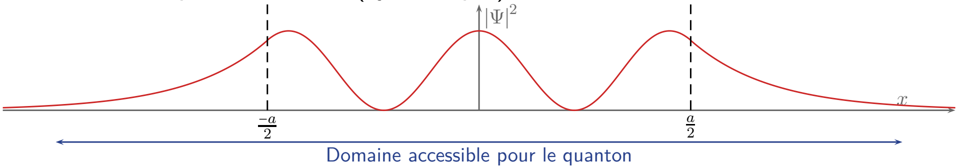
Largeur effective

On observe le premier mode (symétrique)



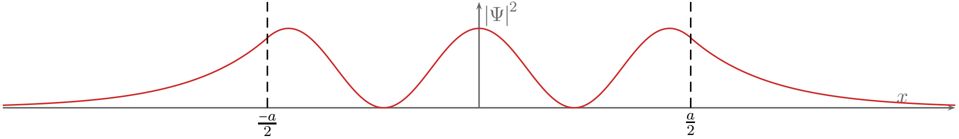
Largeur effective

On observe le premier mode (symétrique)



Largeur effective

On observe le premier mode (symétrique)



- Par analogie avec le raisonnement tenu pour le puits infini, on aura toujours $E_{c,min} = \dfrac{\Delta p^2}{2.m}$ et $\Delta p \geqslant \dfrac{\hbar}{\Delta x}$
- Ici l'incertitude sur la position est supérieure à la largeur du puits

Abaissement de l'énergie minimale

Le niveau d'énergie minimal d'un quanton dans un puits de potentiel fini sera inférieur à celui du même quanton dans un puits de même largeur mais de potentiel infini. Il en sera de même pour les niveaux excités.