

Phénomènes de
propagation

Onde progressive

Dispersion

Étude de la corde
vibrante

Équation
d'Alembert

Onde dans un
solide

Phénomène de propagation dispersive

Le phénomène de dispersion correspond à la déformation de la perturbation au cours de la propagation.

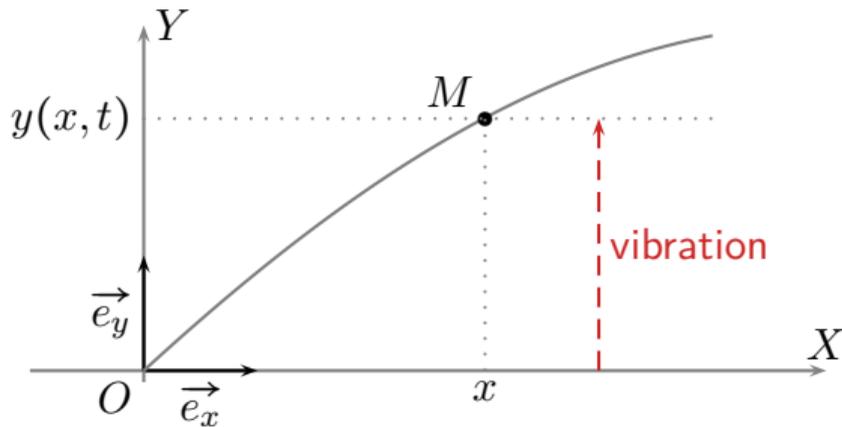
On traitera dans ce chapitre des phénomènes non dispersifs.

Grandeurs caractéristiques :

- Masse linéique de la corde μ uniforme
- Corde tendue avec une tension de norme T

Hypothèses d'étude

- Poids négligeable devant les autres interactions
- Corde ∞ souple
- Petits mouvements transverses

à t fixé

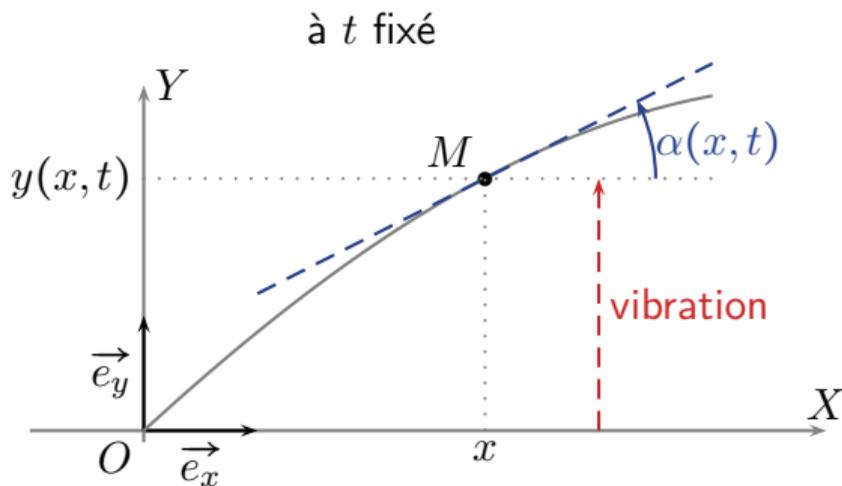
- Les faibles perturbations permettent de considérer α très faible. Un D.L. à l'ordre 1 en α donne :

$$\sin\alpha \equiv$$

$$\tan\alpha \equiv$$

$$\cos\alpha \equiv$$

- On peut relier α et y :



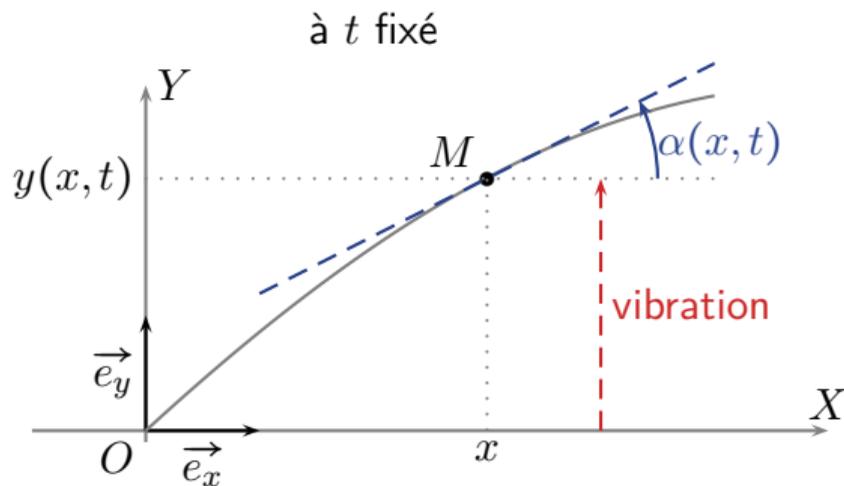
- Les faibles perturbations permettent de considérer α très faible. Un D.L. à l'ordre 1 en α donne :

$$\sin\alpha \equiv$$

$$\tan\alpha \equiv$$

$$\cos\alpha \equiv$$

- On peut relier α et y :



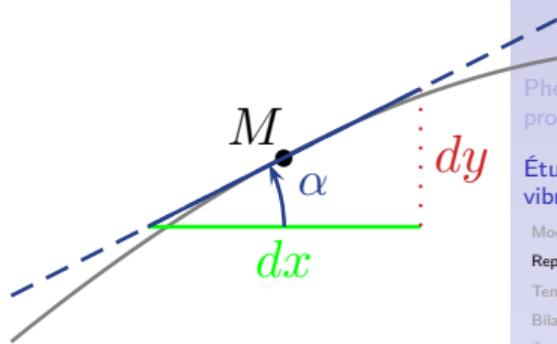
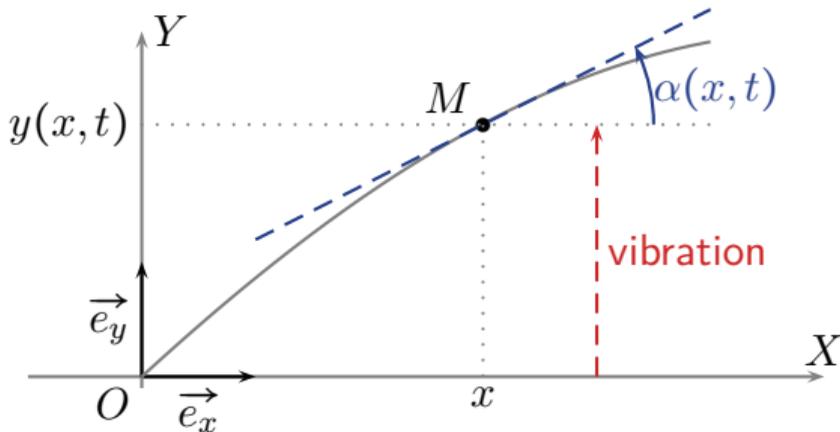
- Les faibles perturbations permettent de considérer α très faible. Un D.L. à l'ordre 1 en α donne :

$$\sin\alpha \equiv \alpha$$

$$\tan\alpha \equiv \alpha$$

$$\cos\alpha \equiv 1$$

- On peut relier α et y :

à t fixé

- Les faibles perturbations permettent de considérer α très faible. Un D.L. à l'ordre 1 en α donne :

$$\sin\alpha \equiv \alpha$$

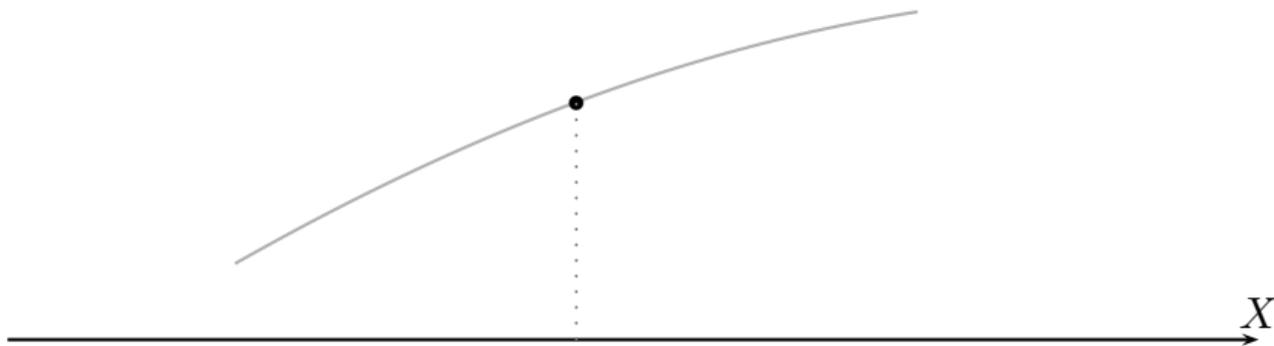
$$\tan\alpha \equiv \alpha$$

$$\cos\alpha \equiv 1$$

- On peut relier α et y :

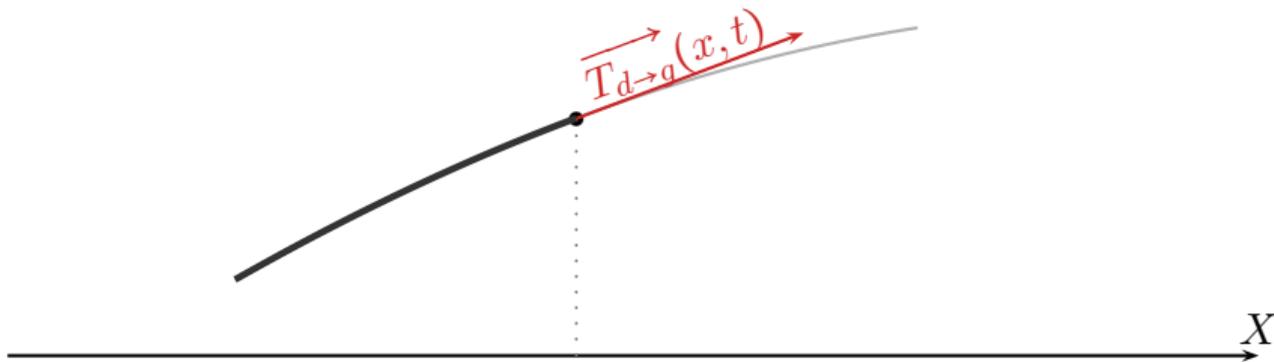
Différentielle $dy = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dt$ avec t fixé

$$\triangleq \quad \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$



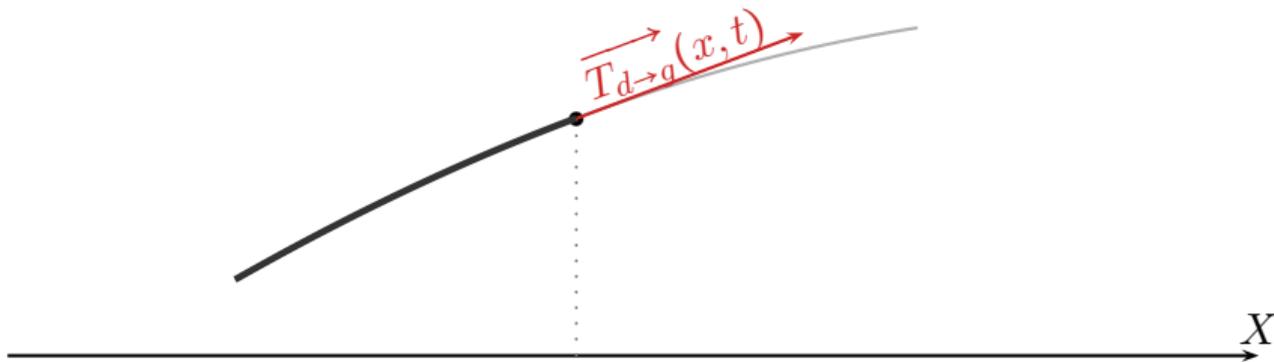
On note $\overrightarrow{T_{d \rightarrow g}}(x, t)$ la force exercée en $M(x)$ par la partie droite de la corde sur la partie gauche, et $T(x, t)$ sa norme. x

Dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , $\overrightarrow{T_{d \rightarrow g}}(x, t) =$



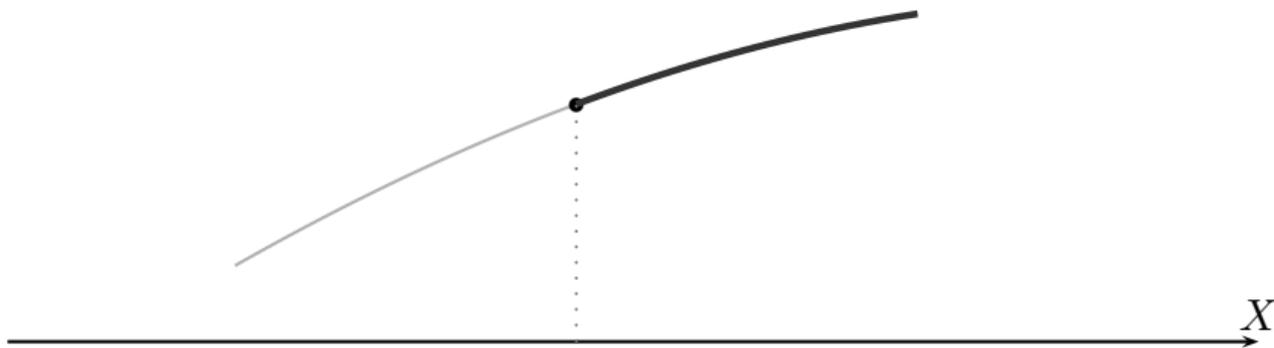
On note $\overrightarrow{T_{d \rightarrow g}}(x, t)$ la force exercée en $M(x)$ par la partie droite de la corde sur la partie gauche, et $T(x, t)$ sa norme. x

Dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , $\overrightarrow{T_{d \rightarrow g}}(x, t) =$



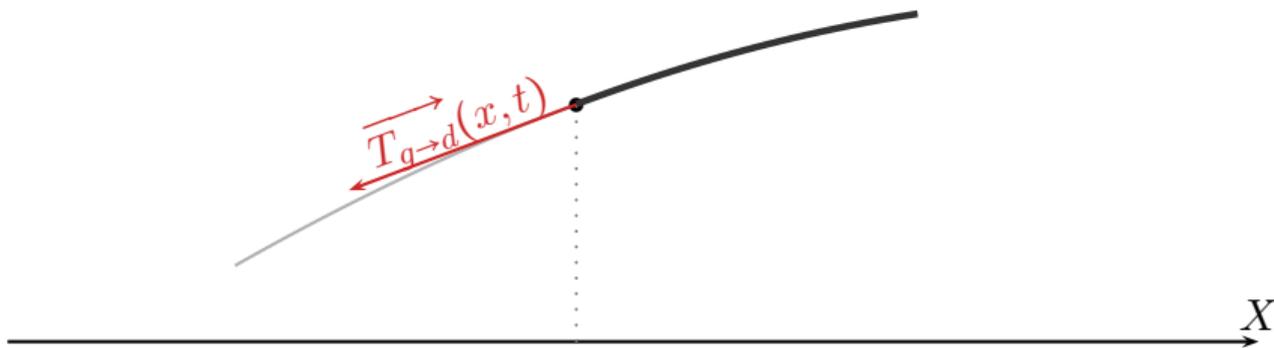
On note $\overrightarrow{T_{d \rightarrow g}}(x, t)$ la force exercée en $M(x)$ par la partie droite de la corde sur la partie gauche, et $T(x, t)$ sa norme. x

Dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , $\overrightarrow{T_{d \rightarrow g}}(x, t) = T(x, t) \cdot [\cos\alpha(x, t) \cdot \vec{e}_x + \sin\alpha(x, t) \cdot \vec{e}_y]$



On note $\vec{T}_{d \rightarrow g}(x, t)$ la force exercée en $M(x)$ par la partie droite de la corde sur la partie gauche, et $T(x, t)$ sa norme. x

Dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , $\vec{T}_{d \rightarrow g}(x, t) = T(x, t) \cdot [\cos \alpha(x, t) \cdot \vec{e}_x + \sin \alpha(x, t) \cdot \vec{e}_y]$



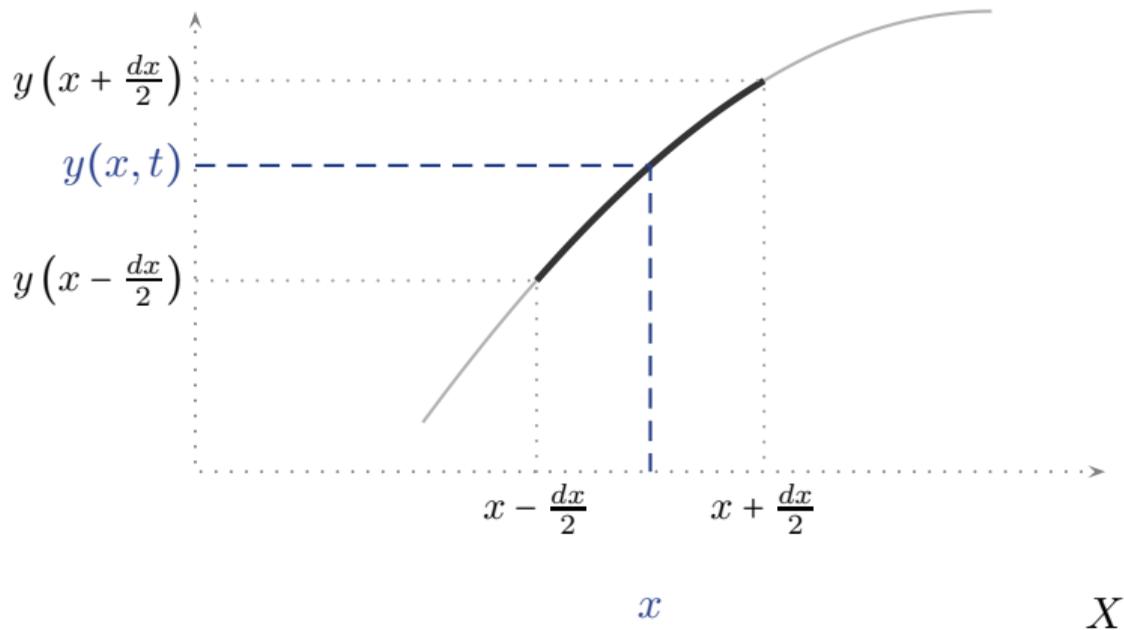
On note $\overrightarrow{T_{d \rightarrow g}}(x, t)$ la force exercée en $M(x)$ par la partie droite de la corde sur la partie gauche, et $T(x, t)$ sa norme. x

Dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , $\overrightarrow{T_{d \rightarrow g}}(x, t) = T(x, t) \cdot [\cos\alpha(x, t) \cdot \vec{e}_x + \sin\alpha(x, t) \cdot \vec{e}_y]$

Principe des actions réciproques

En tout point de la corde

$$\overrightarrow{T_{g \rightarrow d}}(x, t) = -\overrightarrow{T_{d \rightarrow g}}(x, t)$$



Phénomènes de propagation

Étude de la corde vibrante

Modélisation

Repérage

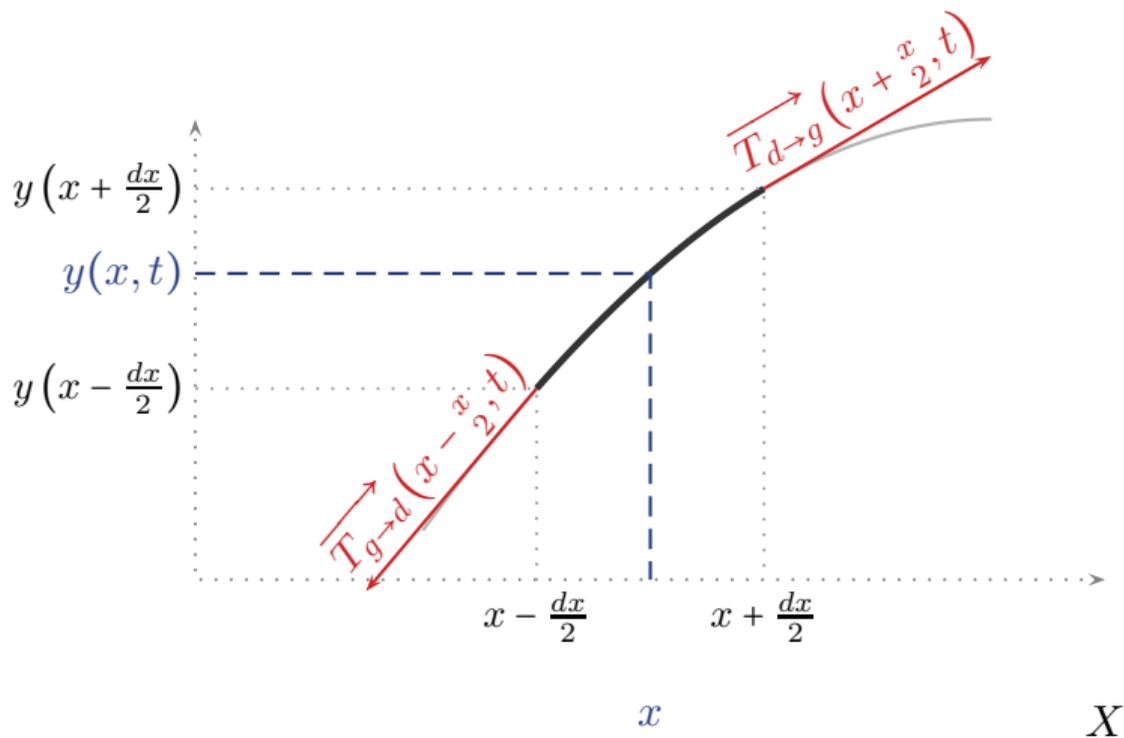
Tension

Bilan dynamique

Équation d'onde

Équation d'Alembert

Onde dans un solide



Phénomènes de propagation

Étude de la corde vibrante

Modélisation

Repérage

Tension

Bilan dynamique

Équation d'onde

Équation d'Alembert

Onde dans un solide

On applique le PFD appliqué à une tranche dx de corde

On applique le PFD appliqué à une tranche dx de corde

- PFD : $dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}_{g \rightarrow d}(x - \frac{x}{2}, t) + \vec{T}_{d \rightarrow g}(x + \frac{x}{2}, t)$

On projette cette relation selon l'axe Ox

- PFD : $dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}_{g \rightarrow d} \left(x - \frac{x}{2}, t \right) + \vec{T}_{d \rightarrow g} \left(x + \frac{x}{2}, t \right)$

On projette cette relation selon l'axe Ox

- PFD : $dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}_{g \rightarrow d}(x - \frac{x}{2}, t) + \vec{T}_{d \rightarrow g}(x + \frac{x}{2}, t)$
- $\tilde{O}x$: $0 = -T(x - \frac{x}{2}, t) \cdot \cos \alpha(x - \frac{x}{2}, t) + T(x + \frac{x}{2}, t) \cdot \cos \alpha(x + \frac{x}{2}, t)$

$$T\left(x - \frac{x}{2}, t\right) = T\left(x + \frac{x}{2}, t\right) \quad \forall (x, t) \rightarrow T(x, t) = T$$

On projette cette relation selon l'axe Oy

- PFD : $dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \vec{e}_y = \overrightarrow{T}_{g \rightarrow d} \left(x - \frac{x}{2}, t \right) + \overrightarrow{T}_{d \rightarrow g} \left(x + \frac{x}{2}, t \right)$
- $\tilde{O}x : 0 = -T \left(x - \frac{x}{2}, t \right) \cdot \cos \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t \right) + T \left(x + \frac{x}{2}, t \right) \cdot \cos \alpha \left(x + \frac{x}{2}, t \right)$

$$T \left(x - \frac{x}{2}, t \right) = T \left(x + \frac{x}{2}, t \right) \quad \forall (x, t) \rightarrow T(x, t) = T$$

Phénomènes de propagation

Étude de la corde vibrante

Modélisation

Repérage

Tension

Bilan dynamique

Équation d'onde

Équation d'Alembert

Onde dans un solide

On projette cette relation selon l'axe Oy

- PFD : $dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}_{g \rightarrow d}(x - \frac{x}{2}, t) + \vec{T}_{d \rightarrow g}(x + \frac{x}{2}, t)$
- $\tilde{O}x$: $0 = -T(x - \frac{x}{2}, t) \cdot \cos\alpha(x - \frac{x}{2}, t) + T(x + \frac{x}{2}, t) \cdot \cos\alpha(x + \frac{x}{2}, t)$

$$T\left(x - \frac{x}{2}, t\right) = T\left(x + \frac{x}{2}, t\right) \quad \forall (x, t) \rightarrow T(x, t) = T$$

- $\tilde{O}y$: $dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -T \cdot \sin\alpha(x - \frac{x}{2}, t) + T \cdot \sin\alpha(x + \frac{x}{2}, t)$

Phénomènes de propagation

Étude de la corde vibrante

Modélisation

Repérage

Tension

Bilan dynamique

Équation d'onde

Équation d'Alembert

Onde dans un solide

On exploite l'hypothèse des faibles perturbations

- PFD : $dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \vec{e}_y = \overrightarrow{T}_{g \rightarrow d} \left(x - \frac{x}{2}, t \right) + \overrightarrow{T}_{d \rightarrow g} \left(x + \frac{x}{2}, t \right)$
- $\tilde{O}_x : 0 = -T \left(x - \frac{x}{2}, t \right) \cdot \cos \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t \right) + T \left(x + \frac{x}{2}, t \right) \cdot \cos \alpha \left(x + \frac{x}{2}, t \right)$

$$T \left(x - \frac{x}{2}, t \right) = T \left(x + \frac{x}{2}, t \right) \quad \forall (x, t) \rightarrow T(x, t) = T$$

- $\tilde{O}_y : dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -T \cdot \sin \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t \right) + T \cdot \sin \alpha \left(x + \frac{x}{2}, t \right)$

On exploite l'hypothèse des faibles perturbations

- PFD : $dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \vec{e}_y = \overrightarrow{T}_{g \rightarrow d} \left(x - \frac{x}{2}, t\right) + \overrightarrow{T}_{d \rightarrow g} \left(x + \frac{x}{2}, t\right)$
- $\tilde{O}_x : 0 = -T \left(x - \frac{x}{2}, t\right) \cdot \cos \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t\right) + T \left(x + \frac{x}{2}, t\right) \cdot \cos \alpha \left(x + \frac{x}{2}, t\right)$

$$T \left(x - \frac{x}{2}, t\right) = T \left(x + \frac{x}{2}, t\right) \quad \forall (x, t) \rightarrow T(x, t) = T$$

- $\tilde{O}_y : dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -T \cdot \sin \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t\right) + T \cdot \sin \alpha \left(x + \frac{x}{2}, t\right)$
 $\approx T \left(\alpha \left(x + \frac{x}{2}, t\right) - \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t\right)\right)$

$$dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T \cdot \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \cdot dx$$

On exploite l'expression de α

- PFD : $dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}_{g \rightarrow d} \left(x - \frac{x}{2}, t \right) + \vec{T}_{d \rightarrow g} \left(x + \frac{x}{2}, t \right)$
- $\tilde{O}_x : 0 = -T \left(x - \frac{x}{2}, t \right) \cdot \cos \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t \right) + T \left(x + \frac{x}{2}, t \right) \cdot \cos \alpha \left(x + \frac{x}{2}, t \right)$

$$T \left(x - \frac{x}{2}, t \right) = T \left(x + \frac{x}{2}, t \right) \quad \forall (x, t) \rightarrow T(x, t) = T$$

- $\tilde{O}_y : dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -T \cdot \sin \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t \right) + T \cdot \sin \alpha \left(x + \frac{x}{2}, t \right)$
 $\approx T \left(\alpha \left(x + \frac{x}{2}, t \right) - \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t \right) \right)$

$$dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T \cdot \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \cdot dx$$

Phénomènes de propagation

Étude de la corde vibrante

Modélisation

Repérage

Tension

Bilan dynamique

Équation d'onde

Équation d'Alembert

Onde dans un solide

On exploite l'expression de α

- PFD : $dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \vec{e}_y = \overrightarrow{T}_{g \rightarrow d} \left(x - \frac{x}{2}, t \right) + \overrightarrow{T}_{d \rightarrow g} \left(x + \frac{x}{2}, t \right)$
- $\tilde{O}_x : 0 = -T \left(x - \frac{x}{2}, t \right) \cdot \cos \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t \right) + T \left(x + \frac{x}{2}, t \right) \cdot \cos \alpha \left(x + \frac{x}{2}, t \right)$

$$T \left(x - \frac{x}{2}, t \right) = T \left(x + \frac{x}{2}, t \right) \quad \forall (x, t) \rightarrow T(x, t) = T$$

- $\tilde{O}_y : dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -T \cdot \sin \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t \right) + T \cdot \sin \alpha \left(x + \frac{x}{2}, t \right)$
 $\approx T \left(\alpha \left(x + \frac{x}{2}, t \right) - \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t \right) \right)$

$$dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T \cdot \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \cdot dx T \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \cdot dx$$

Phénomènes de propagation

Étude de la corde vibrante

Modélisation

Repérage

Tension

Bilan dynamique

Équation d'onde

Équation d'Alembert

Onde dans un solide

On relie dm et dx

- PFD : $dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}_{g \rightarrow d}(x - \frac{x}{2}, t) + \vec{T}_{d \rightarrow g}(x + \frac{x}{2}, t)$
- $\tilde{O}_x : 0 = -T(x - \frac{x}{2}, t) \cdot \cos \alpha(x - \frac{x}{2}, t) + T(x + \frac{x}{2}, t) \cdot \cos \alpha(x + \frac{x}{2}, t)$

$$T\left(x - \frac{x}{2}, t\right) = T\left(x + \frac{x}{2}, t\right) \quad \forall (x, t) \rightarrow T(x, t) = T$$

- $\tilde{O}_y : dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -T \cdot \sin \alpha(x - \frac{x}{2}, t) + T \cdot \sin \alpha(x + \frac{x}{2}, t)$
 $\approx T \left(\alpha(x + \frac{x}{2}, t) - \alpha(x - \frac{x}{2}, t) \right)$

$$dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T \cdot \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \cdot dx T \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \cdot dx$$

On relie dm et dx

- PFD : $dm \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \vec{e}_y = \overrightarrow{T}_{g \rightarrow d} \left(x - \frac{x}{2}, t\right) + \overrightarrow{T}_{d \rightarrow g} \left(x + \frac{x}{2}, t\right)$
- $\tilde{O}x$: $0 = -T \left(x - \frac{x}{2}, t\right) \cdot \cos \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t\right) + T \left(x + \frac{x}{2}, t\right) \cdot \cos \alpha \left(x + \frac{x}{2}, t\right)$

$$T \left(x - \frac{x}{2}, t\right) = T \left(x + \frac{x}{2}, t\right) \quad \forall (x, t) \rightarrow T(x, t) = T$$

- $\tilde{O}y$: $dm \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -T \cdot \sin \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t\right) + T \cdot \sin \alpha \left(x + \frac{x}{2}, t\right)$
 $\approx T \left(\alpha \left(x + \frac{x}{2}, t\right) - \alpha \left(x - \frac{x}{2}, t\right)\right)$

$$dm \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T \cdot \frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x} \cdot dx T \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \cdot dx$$

- $dm = \mu \cdot dl = \mu \cdot \frac{dx}{\cos \alpha(x,t)} \approx \mu \cdot dx$

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

On définit la vitesse de phase de l'onde, v_φ telle que l'équation d'onde s'écrive sous la forme

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - v_\varphi^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

Pour la corde vibrante, le bilan dynamique a donné :

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

Par analyse dimensionnelle

- Proposer la forme canonique de l'équation de propagation
- Retrouver par analyse dimensionnelle l'expression de la vitesse de phase en fonction de μ et T

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

L'onde se propage selon la direction Ox .

$s(x, t)$ décrit la perturbation due au passage de l'onde en x à l'instant t

Équation d'Alembert unidimensionnelle

Une grandeur physique $s(x, t)$ vérifie l'équation d'Alembert unidimensionnelle si

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - v_\varphi^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0$$

avec v_φ la vitesse de phase de l'onde, en $m.s^{-1}$

Phénomènes de propagation

Étude de la corde vibrante

Équation d'Alembert

Forme unidimensionnelle

Onde progressive

Onde progressive harmonique

Solutions stationnaires

Ondes stationnaires

Onde dans un solide

Cohérence de la solution avec l'équation

Vérifier que la forme générale de la solution proposée pour une onde progressive est bien solution de l'équation d'Alembert.

Cohérence de la solution avec l'équation

Vérifier que la forme générale de la solution proposée pour une onde progressive est bien solution de l'équation d'Alembert.

- $f\left(t - \epsilon \cdot \frac{x}{v_\varphi}\right) = f(u)$ avec $u = t - \epsilon \cdot \frac{x}{v_\varphi}$
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\epsilon}{v_\varphi} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \left(\frac{-\epsilon}{v_\varphi} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$
- Plus simplement $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - c^2 \cdot \left(\frac{-\epsilon}{v_\varphi} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0$

On vérifie donc bien l'équation d'Alembert.

Phénomènes de propagation

Étude de la corde vibrante

Équation d'Alembert

Forme unidimensionnelle

Onde progressive

Onde progressive harmonique

Solutions stationnaires

Ondes stationnaires

Onde dans un solide

Phénomènes de
propagation

Étude de la corde
vibrante

Équation d'Alembert

Forme unidimensionnelle

Onde progressive

Onde progressive
harmonique

Fréquences spatio-temporelles

Forme de la solution

Solutions stationnaires

Ondes stationnaires

Onde dans un
solide

Forme unidimensionnelle

Onde progressive

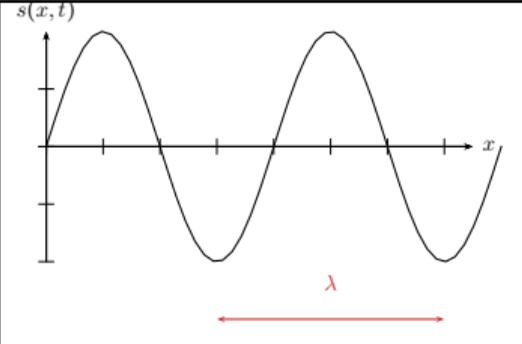
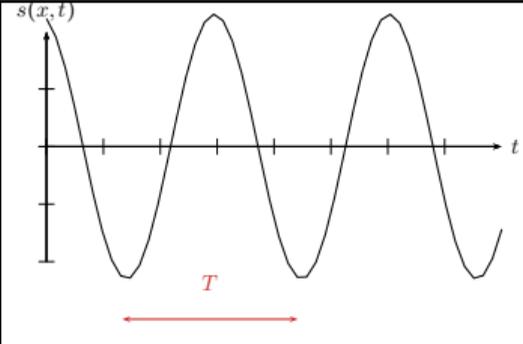
Onde progressive harmonique

Fréquences spatio-temporelles

Forme de la solution

Solutions stationnaires

Ondes stationnaires

		
Pulsation	k	ω
Fréquence	$\sigma = \frac{k}{2\pi}$	$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$
Période	$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\sigma}$	$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$

Onde progressive harmonique

Onde Progressive Harmonique se propageant dans le sens des x croissants est caractérisée par son vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$ avec k le nombre d'onde.

$$s(x, t) = S_0 \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi) \longrightarrow \underline{s} = S_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$$

Relation de dispersion

$$k = \frac{\omega}{v_\varphi}$$

Lorsque la vitesse de phase v_φ de l'onde est indépendante de la pulsation ω , la propagation est dite **non dispersive**.

Ondes stationnaires

S'il existe des nœuds où la vibration est nulle à tout instant, il n'y a plus de progression possible de l'onde. L'onde est alors dite stationnaire.

Pour une telle onde, la solution peut s'écrire sous la forme



$$s(x, t) = 2.S_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$