Phénomène de propagation dispersive

Le phénomène de dispersion correspond à la déformation de la perturbation au cours de la propagation.

On traitera dans ce chapitre des phénomènes non dispersifs.

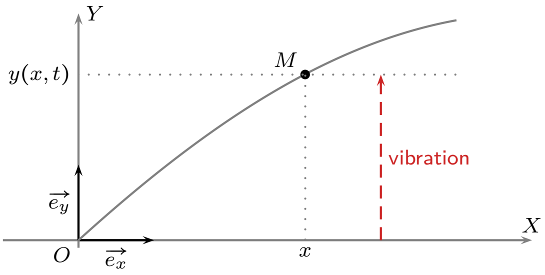
Grandeurs caractéristiques :

- Masse linéïque de la corde μ uniforme
- Corde tendue avec une tension de norme T

Hypothèses d'étude

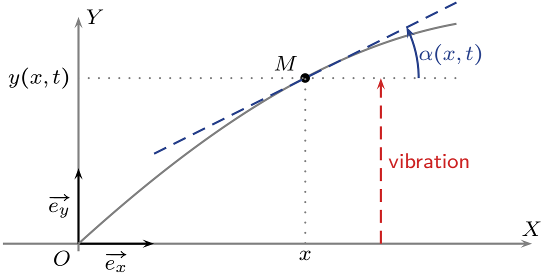
- Poids négligeable devant les autres interactions
- Corde ∞ souple
- Petits mouvements transverses

à t fixé



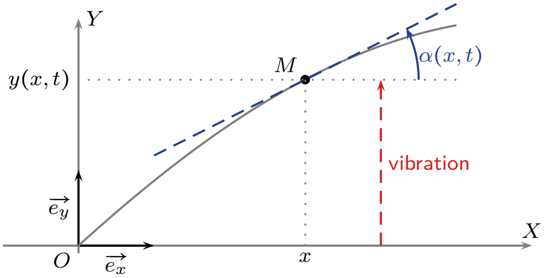
- Les faibles perturbations permettent de considérer α très faible. Un D.L. à l'ordre 1 en α donne :
  $sin\alpha \equiv$ $tan\alpha \equiv$ $cos\alpha \equiv$
- On peut relier α et y :

à t fixé

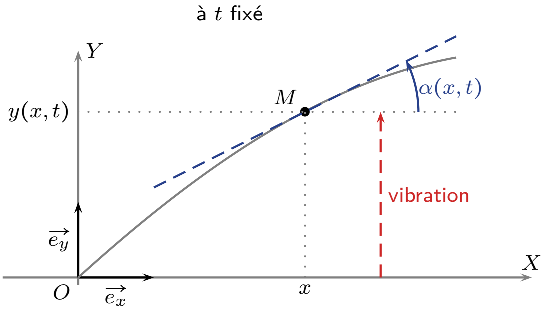


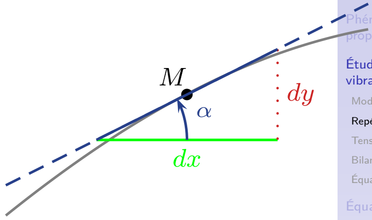
- Les faibles perturbations permettent de considérer α très faible. Un D.L. à l'ordre 1 en α donne :
  $sin\alpha \equiv$ $tan\alpha \equiv$ $cos\alpha \equiv$
- On peut relier α et y :

à t fixé



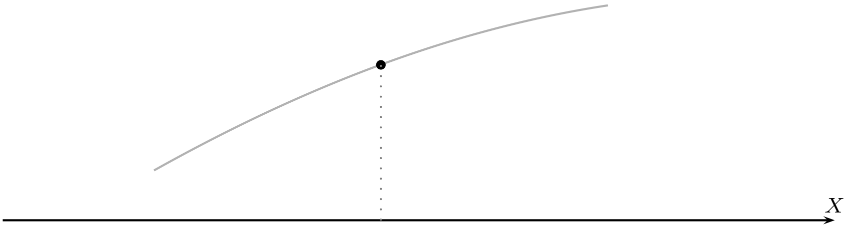
- Les faibles perturbations permettent de considérer α très faible. Un D.L. à l'ordre 1 en α donne : $sin\alpha \equiv\alpha$ $tan\alpha \equiv\alpha$ $cos\alpha \equiv 1$
- On peut relier α et y :





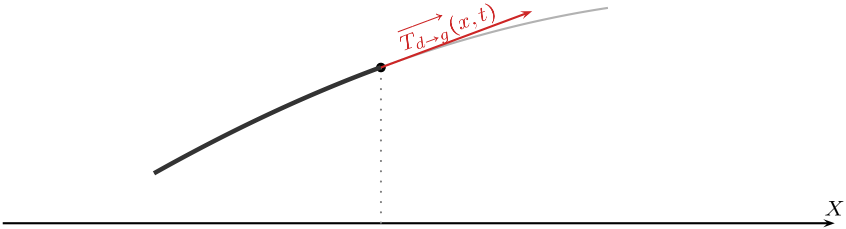
- Les faibles perturbations permettent de considérer α très faible. Un D.L. à l'ordre 1 en α donne :
  $sin\alpha \equiv \alpha$ $tan\alpha \equiv \alpha$ $cos\alpha \equiv 1$
- On peut relier α et y :
  Différentielle $dy = \dfrac{\partial y}{\partial x}.dx + \dfrac{\partial y}{\partial t}.dt$ avec t fixé

$$tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$



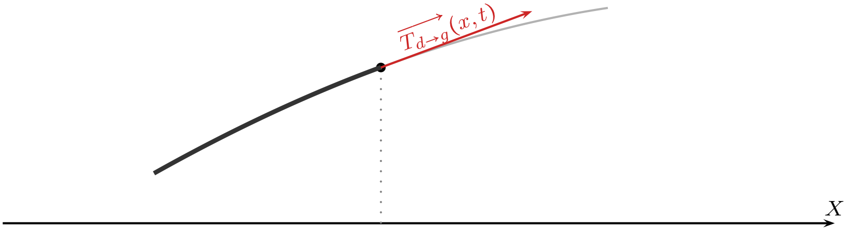
On note $\overrightarrow{T_{d\to g}}(x,t)$ la force exercée en $M(x)$ par la partie droite de la corde sur la partie gauche, et $T(x,t)$ sa norme.

Dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$, $\overrightarrow{T_{d\to g}}(x,t)$ =



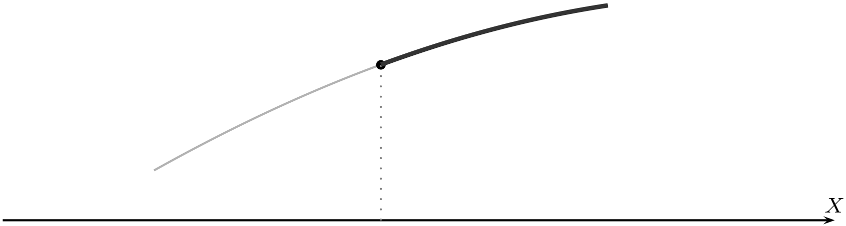
On note $\overrightarrow{T_{d\to g}}(x,t)$ la force exercée en $M(x)$ par la partie droite de la corde sur la partie gauche, et $T(x,t)$ sa norme.

Dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$, $\overrightarrow{T_{d\to g}}(x,t)$ =



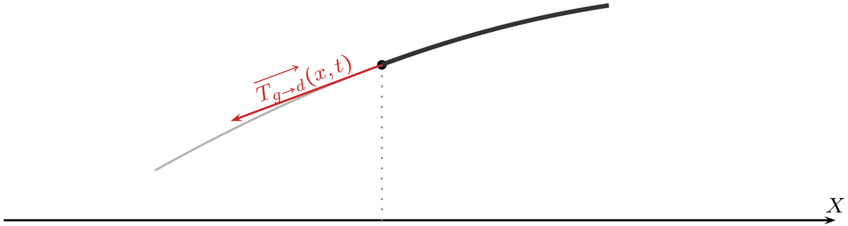
On note $\overrightarrow{T_{d\to g}}(x,t)$ la force exercée en $M(x)$ par la partie droite de la corde sur la partie gauche, et $T(x,t)$ sa norme.

Dans la base $(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y})$, $\overrightarrow{T_{d\to g}}(x,t) = T(x,t).\left[cos\alpha(x,t).\overrightarrow{e_x} + sin\alpha(x,t).\overrightarrow{e_y}\right]$



On note $\overrightarrow{T_{d\to g}}(x,t)$ la force exercée en $M(x)$ par la partie droite de la corde sur la partie gauche, et $T(x,t)$ sa norme.

Dans la base $(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y})$, $\overrightarrow{T_{d\to g}}(x,t) = T(x,t).\left[cos\alpha(x,t).\overrightarrow{e_x} + sin\alpha(x,t).\overrightarrow{e_y}\right]$



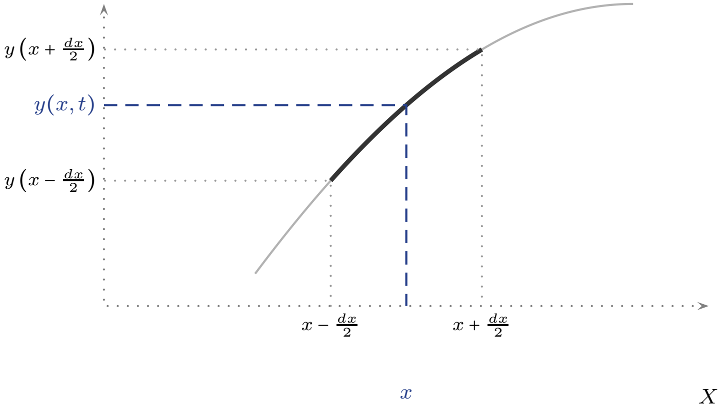
On note $\overrightarrow{T_{d\rightarrow g}}(x,t)$ la force exercée en $M(x)$ par la partie droite de la corde sur la partie gauche, et $T(x,t)$ sa norme.

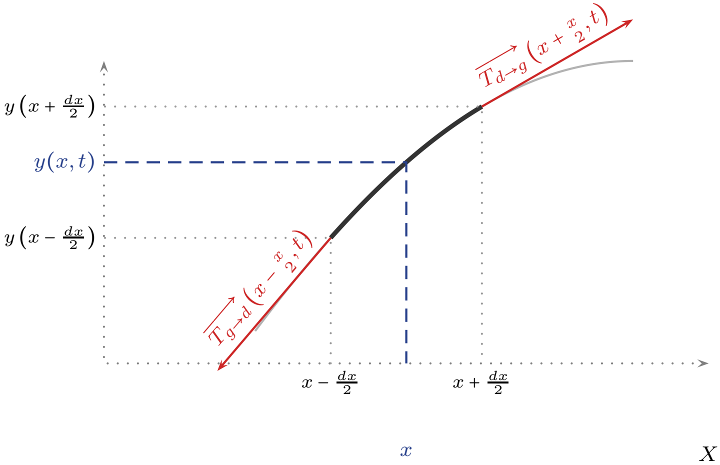
Dans la base $(\vec{e_x},\vec{e_y})$, $\overrightarrow{T_{d\rightarrow g}}(x,t) = T(x,t).\left[cos\alpha(x,t).\vec{e_x} + sin\alpha(x,t).\vec{e_y}\right]$

Principe des actions réciproques

En tout point de la corde

$$\overrightarrow{T_{g\rightarrow d}}(x,t) = -\overrightarrow{T_{d\rightarrow g}}(x,t)$$


$y\left(x+\frac{dx}{2}\right)$
$y(x,t)$
$y\left(x-\frac{dx}{2}\right)$
$x-\frac{dx}{2}$
$x+\frac{dx}{2}$
x
X



$\overrightarrow{T_{d\to g}}\left(x+\frac{x}{2},t\right)$
$y\left(x+\frac{dx}{2}\right)$
$y(x,t)$
$y\left(x-\frac{dx}{2}\right)$
$\overrightarrow{T_{g\to d}}\left(x-\frac{x}{2},t\right)$
$x-\frac{dx}{2}$
$x+\frac{dx}{2}$
x
X

On applique le PFD appliqué à une tranche dx de corde

On applique le PFD appliqué à une tranche dx de corde

- PFD : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T_{g\to d}}\left(x - \frac{x}{2}, t\right) + \overrightarrow{T_{d\to g}}\left(x + \frac{x}{2}, t\right)$

On projette cette relation selon l'axe Ox

- PFD : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T_{g\to d}}\left(x - \frac{x}{2}, t\right) + \overrightarrow{T_{d\to g}}\left(x + \frac{x}{2}, t\right)$

On projette cette relation selon l'axe Ox

- PFD : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T_{g\to d}}(x-\frac{x}{2},t) + \overrightarrow{T_{d\to g}}(x+\frac{x}{2},t)$
- Ox : $0 = -T(x-\frac{x}{2},t).cos\alpha(x-\frac{x}{2},t) + T(x+\frac{x}{2},t).cos\alpha(x+\frac{x}{2},t)$

$$T\left(x-\frac{x}{2},t\right) = T\left(x+\frac{x}{2},t\right)\ \forall(x,t)\ \rightarrow\ T(x,t) = T$$

On projette cette relation selon l'axe Oy

- PFD : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T_{g\to d}}(x-\frac{x}{2},t) + \overrightarrow{T_{d\to g}}(x+\frac{x}{2},t)$
- Ox : $0 = -T(x-\frac{x}{2},t).cos\alpha(x-\frac{x}{2},t) + T(x+\frac{x}{2},t).cos\alpha(x+\frac{x}{2},t)$

$$T\left(x-\frac{x}{2},t\right) = T\left(x+\frac{x}{2},t\right)\ \forall (x,t)\ \rightarrow\ T(x,t) = T$$

On projette cette relation selon l'axe Oy

- PFD : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T_{g\to d}}(x-\frac{x}{2},t) + \overrightarrow{T_{d\to g}}(x+\frac{x}{2},t)$
- Ox : $0 = -T(x-\frac{x}{2},t).cos\alpha(x-\frac{x}{2},t) + T(x+\frac{x}{2},t).cos\alpha(x+\frac{x}{2},t)$

$$T\left(x-\frac{x}{2},t\right) = T\left(x+\frac{x}{2},t\right)\ \forall(x,t)\ \rightarrow\ T(x,t) = T$$

- Oy : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -T.sin\alpha(x-\frac{x}{2},t) + T.sin\alpha(x+\frac{x}{2},t)$

On exploite l'hypothèse des faibles perturbations

- PFD : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T_{g\to d}}(x-\frac{x}{2},t) + \overrightarrow{T_{d\to g}}(x+\frac{x}{2},t)$
- Ox : $0 = -T(x-\frac{x}{2},t).cos\alpha(x-\frac{x}{2},t) + T(x+\frac{x}{2},t).cos\alpha(x+\frac{x}{2},t)$

$$T\left(x-\frac{x}{2},t\right) = T\left(x+\frac{x}{2},t\right)\ \forall(x,t)\ \rightarrow\ T(x,t) = T$$

- Oy : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -T.sin\alpha(x-\frac{x}{2},t) + T.sin\alpha(x+\frac{x}{2},t)$

On exploite l'hypothèse des faibles perturbations

- PFD : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T_{g\to d}}\left(x-\frac{x}{2},t\right) + \overrightarrow{T_{d\to g}}\left(x+\frac{x}{2},t\right)$
- Ox : $0 = -T\left(x-\frac{x}{2},t\right).cos\alpha\left(x-\frac{x}{2},t\right) + T\left(x+\frac{x}{2},t\right).cos\alpha\left(x+\frac{x}{2},t\right)$

$$T\left(x-\frac{x}{2},t\right) = T\left(x+\frac{x}{2},t\right)\ \forall(x,t)\ \rightarrow\ T(x,t) = T$$

- Oy : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -T.sin\alpha\left(x-\frac{x}{2},t\right) + T.sin\alpha\left(x+\frac{x}{2},t\right)\ \approx T\left(\alpha\left(x+\frac{x}{2},t\right) - \alpha\left(x-\frac{x}{2},t\right)\right)$

$$dm\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T.\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x}.dx$$

On exploite l'expression de α

- PFD : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T_{g\to d}}\left(x-\frac{x}{2},t\right) + \overrightarrow{T_{d\to g}}\left(x+\frac{x}{2},t\right)$
- Ox : $0 = -T\left(x-\frac{x}{2},t\right).cos\alpha\left(x-\frac{x}{2},t\right) + T\left(x+\frac{x}{2},t\right).cos\alpha\left(x+\frac{x}{2},t\right)$

$$T\left(x-\frac{x}{2},t\right) = T\left(x+\frac{x}{2},t\right)\ \forall(x,t)\ \rightarrow\ T(x,t) = T$$

- Oy : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -T.sin\alpha\left(x-\frac{x}{2},t\right) + T.sin\alpha\left(x+\frac{x}{2},t\right)\ \approx T\left(\alpha\left(x+\frac{x}{2},t\right) - \alpha\left(x-\frac{x}{2},t\right)\right)$

$$dm\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T.\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x}.dx$$

On exploite l'expression de α

- PFD : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T_{g\to d}}(x-\frac{x}{2},t) + \overrightarrow{T_{d\to g}}(x+\frac{x}{2},t)$
- Ox : $0 = -T(x-\frac{x}{2},t).cos\alpha(x-\frac{x}{2},t) + T(x+\frac{x}{2},t).cos\alpha(x+\frac{x}{2},t)$

$$T\left(x-\frac{x}{2},t\right) = T\left(x+\frac{x}{2},t\right)\ \forall(x,t)\ \rightarrow\ T(x,t) = T$$

- Oy : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -T.sin\alpha(x-\frac{x}{2},t) + T.sin\alpha(x+\frac{x}{2},t) \ \approx T\left(\alpha(x+\frac{x}{2},t) - \alpha(x-\frac{x}{2},t)\right)$

$$dm\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T.\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x}.dxT.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}.dx$$

On relie dm et dx

- PFD : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T_{g\to d}}\left(x-\frac{x}{2},t\right) + \overrightarrow{T_{d\to g}}\left(x+\frac{x}{2},t\right)$
- Ox : $0 = -T\left(x-\frac{x}{2},t\right).cos\alpha\left(x-\frac{x}{2},t\right) + T\left(x+\frac{x}{2},t\right).cos\alpha\left(x+\frac{x}{2},t\right)$

$$T\left(x-\frac{x}{2},t\right) = T\left(x+\frac{x}{2},t\right)\ \forall(x,t)\ \rightarrow\ T(x,t) = T$$

- Oy : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -T.sin\alpha\left(x-\frac{x}{2},t\right) + T.sin\alpha\left(x+\frac{x}{2},t\right)\ \approx T\left(\alpha\left(x+\frac{x}{2},t\right) - \alpha\left(x-\frac{x}{2},t\right)\right)$

$$dm\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T.\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x}.dxT.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}.dx$$

On relie dm et dx

- PFD : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T_{g\to d}}\left(x-\frac{x}{2},t\right) + \overrightarrow{T_{d\to g}}\left(x+\frac{x}{2},t\right)$
- Ox : $0 = -T\left(x-\frac{x}{2},t\right).cos\alpha\left(x-\frac{x}{2},t\right) + T\left(x+\frac{x}{2},t\right).cos\alpha\left(x+\frac{x}{2},t\right)$

$$T\left(x-\frac{x}{2},t\right) = T\left(x+\frac{x}{2},t\right)\ \forall(x,t)\ \rightarrow\ T(x,t) = T$$

- Oy : $dm\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -T.sin\alpha\left(x-\frac{x}{2},t\right) + T.sin\alpha\left(x+\frac{x}{2},t\right)\ \approx T\left(\alpha\left(x+\frac{x}{2},t\right) - \alpha\left(x-\frac{x}{2},t\right)\right)$

$$dm\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T.\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x}.dxT.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}.dx$$

- $dm = \mu.dl = \mu.\dfrac{dx}{cos\alpha(x,t)} \approx \mu.dx$

$$\mu.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

On définit la vitesse de phase de l'onde, v_φ telle que l'équation d'onde s'écrive sous la forme

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - v_\varphi^2 . \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Pour la corde vibrante, le bilan dynamique a donné :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Par analyse dimensionnelle

- Proposer la forme canonique de l'équation de propagation
- Retrouver par analyse dimensionnelle l'expression de la vitesse de phase en fonction de μ et T

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

L'onde se propage selon la direction Ox.
$s(x,t)$ décrit la perturbation due au passage de l'onde en x à l'instant t

Équation d'Alembert unidimensionnelle

Une grandeur physique $s(x,t)$ vérifie l'équation d'Alembert unidimensionnelle si

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - v_\varphi^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0$$

avec v_φ la vitesse de phase de l'onde, en $m.s^{-1}$

Cohérence de la solution avec l'équation

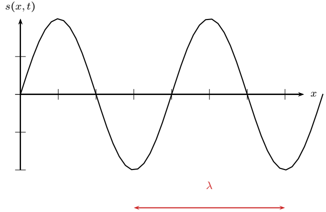
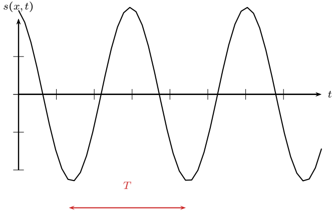
Vérifier que la forme générale de la solution proposée pour une onde progressive est bien solution de l'équation d'Alembert.

Cohérence de la solution avec l'équation

Vérifier que la forme générale de la solution proposée pour une onde progressive est bien solution de l'équation d'Alembert.

- $f\left(t - \epsilon.\frac{x}{v_\varphi}\right) = f(u)$ avec $u = t - \epsilon.\frac{x}{v_\varphi}$
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\epsilon}{v_\varphi}.\frac{\partial f}{\partial u}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{-\epsilon}{v_\varphi}\right)^2.\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$
- Plus simplement $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - c^2.\left(\frac{-\epsilon}{v_\varphi}\right)^2.\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0$

On vérifie donc bien l'équation d'Alembert.

		
Pulsation	k	ω
Fréquence	$\sigma = \frac{k}{2\pi}$	$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$
Période	$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\sigma}$	$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$

Onde progressive harmonique

Onde Progressive Harmonique se propageant dans le sens des x croissants est caractérisée par son vecteur d'onde $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u_x}$ avec k le nombre d'onde.

$$s(x,t) = S_0.cos\left(\omega t - kx + \varphi\right) \longrightarrow \underline{s} = S_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$$

Relation de dispersion

$$k = \frac{\omega}{v_\varphi}$$

Lorsque la vitesse de phase v_φ de l'onde est indépendante de la pulsation ω, la propagation est dite **non dispersive**.

Ondes stationnaires

S'il existe des nœuds où la vibration est nulle à tout instant, il n'y a plus de progression possible de l'onde. L'onde est alors dite stationnaire.
Pour une telle onde, la solution peut s'écrire sous la forme

$$s(x,t) = 2.S_0 cos(\omega t + \varphi) cos(kx + \psi)$$