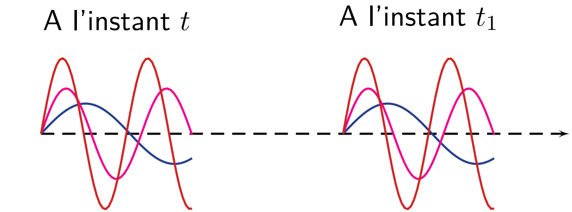
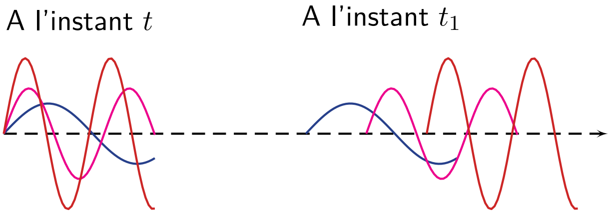
Phénomènes dispersifs

PC Lycée Dupuy de Lôme



Phénomène non dispersif



Phénomène dispersif

Vitesse de phase

La vitesse de propagation de la perturbation associée à l'onde est nommée vitesse de phase

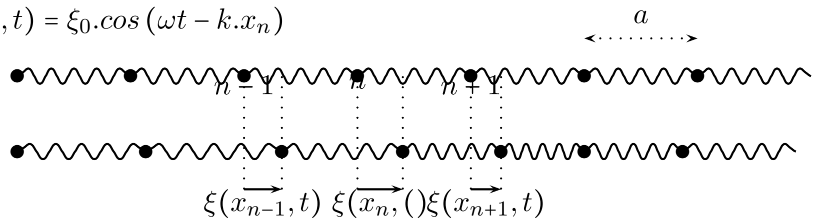
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Phénomène dispersif

- Un Phénomène ondulatoire est dispersif si la vitesse de phase est fonction de ω
- On nomme relation de dispersion $k = f(\omega)$
- La relation de dispersion permet de déduire le caractère dispersif ou non du phénomène de propagation.

Ressorts de raideur K et de longueur à vide a. On propose une forme de la solution :

$\xi(x_n, t) = \xi_0.cos\left(\omega t - k.x_n\right)$



$$sin^2\frac{k.a}{2} = \frac{\omega^2}{4.\omega_0^2} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

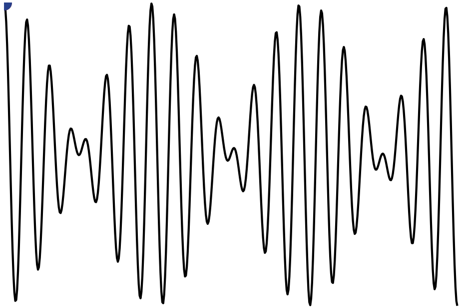
La vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ dépend de la pulsation. Le phénomène étudié est donc ici dispersif.

Superposition de deux $OPPH$ de même amplitude, de pulsations $\omega_1 = \omega_0 - \dfrac{\delta\omega}{2}$ et $\omega_0 + \dfrac{\delta\omega}{2}$:

$$s(x,t) = s_0\left[cos(\omega_1 t - k_1 x) + cos(\omega_2 t - k_2 x)\right]$$

si $\delta\omega << \omega_0$,

$$s(x,t) \equiv s_0 cos\left(\omega_0 t - k_0 x\right) cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right)$$



- $cos\left(\omega_0 t - k_0 x\right)$ de vitesse $\dfrac{\omega_0}{k_0}$:
- $cos\left(\dfrac{\delta\omega}{2}t - \dfrac{\delta k}{2}x\right)$ de vitesse $\dfrac{\delta\omega}{\delta k}$:

Vitesse de groupe

On définit la vitesse de groupe comme étant la vitesse de propagation de l'information pour un phénomène de propagation dispersif

$$v_g = \frac{d\omega}{d\mathcal{R}e\,(k)}$$

A la différence des milieux non dispersifs, les vitesses de propagation de l'onde et de l'information sont différentes

Forme générale

Pour une vibration $s(M,t)$ et une propagation éventuelle selon l'axe Ox, on proposera une solution du type :

$$\underline{s}(M,t) = S_0.e^{i.(\omega t - \underline{k}x)}$$

Avec $\underline{k} = k' - i.k''$ le nombre d'onde complexe

Vitesses de phase et de groupe

Associées à cette solution, on a les vitesses de phase et de groupe

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\mathcal{R}e(k)} \quad \texttt{et} \quad v_g = \frac{d\omega}{d\mathcal{R}e(k)}$$

Indice complexe

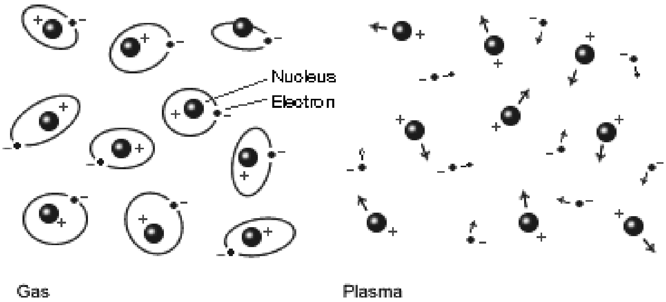
On associe à un milieu un indice n tel que

$$\underline{k} = \underline{n}.\frac{\omega}{c}$$

Avec $\underline{n} = n' - i.n''$

Définition d'un plasma

Un plasma est un milieu ionisé très peu dense où les électrons sont considérés comme très mobiles sans interaction avec les noyaux. Les ions positifs, de masse beaucoup plus importante, seront considérés comme immobiles.



Le plasma étant globalement neutre, $div\overrightarrow{E} = 0$

transversalité

Le champ électrique associé à une OPPH dans un plasma sera transversal.

On considère une OEM pour laquelle en tout point M du plasma :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0.e^{i.\left(\omega t - \underline{\overrightarrow{k}}\cdot\overrightarrow{OM}\right)}.\overrightarrow{e_y}$$

L'electron est soumis :

- A la force de Lorentz $\overrightarrow{F} = -e.\left(\underline{\overrightarrow{E}} + \underline{\overrightarrow{v}} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}\right)$
- Au poids $\overrightarrow{P} = m_e.\overrightarrow{g}$

Pour l'électron non relativiste, les poids et la force magnétique seront négligeables devant la force électrique.

Le PFD appliqué à l'électron donne donc, en notant $\underline{\overrightarrow{r}}_e$ le vecteur position pour l'électron :

$m_e.\frac{d^2\underline{\overrightarrow{r}}_e}{dt^2} = m_e.\frac{d\underline{\overrightarrow{v}}_e}{dt} = -e\underline{\overrightarrow{E}}$, soit

$$\underline{\overrightarrow{v}}_e = \frac{-e}{i.\omega.m_e}.\underline{\overrightarrow{E}}$$

Le déplacement de ces électrons correspond donc à une densité volumique de courant :

$$\overrightarrow{j} = -n_e.(-e)\,.\underline{\overrightarrow{v}}_e = \frac{n_e.e^2}{i.\omega.m_e}.\underline{\overrightarrow{E}}$$

Conductivité dynamique

Le plasma est caractérisé par sa conductivité dynamique $\underline{\gamma}$ telle que, selon la loi d'Ohm locale, $\overrightarrow{j} = \underline{\gamma}.\underline{\overrightarrow{E}}$.

✍ $$\underline{\gamma} = \frac{n_e.e^2}{i.\omega.m_e}$$

- Les pulsations des OEM étudiées ne correspondront pas à l'ARQS.
- L'interaction onde-plasma est modélisée par une densité volumique de courants $\overrightarrow{j} = \underline{\gamma}.\underline{\overrightarrow{E}}$

Les équations de Maxwell amène alors à l'équation suivante :

$$\Delta\underline{\overrightarrow{E}} - \mu_0.\underline{\gamma}\frac{\partial\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t} - \mu_0.\epsilon_0.\frac{\partial^2\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

- Forme générale du champ : $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0.e^{i.\left(\omega t - \underline{\overrightarrow{k}}.\overrightarrow{OM}\right)}.\overrightarrow{e_y}$
- Équation de propagation : $\Delta\underline{\overrightarrow{E}} - \mu_0.\underline{\gamma}\dfrac{\partial\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t} - \mu_0.\epsilon_0.\dfrac{\partial^2\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$

Relation de dispersion

k et ω sont tels que :

✍ $$k = \frac{\omega - \omega_p^2}{c^2} \quad \texttt{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{n.e^2}{\epsilon_0.m_e}}$$

$\omega > \omega_p$: **Milieu transparent**

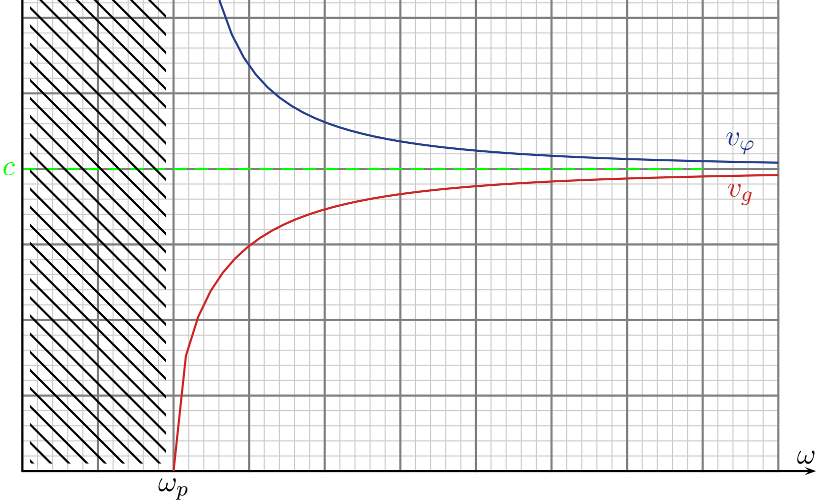
On a dans ce cas $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} cos(\omega t - k'x)$ Le milieu est alors "transparent", il y a propagation sans déperdition de l'onde, mais le milieu est dispersif.
On peut alors calculer les deux vitesses caractéristiques de l'onde

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$$

La vitesse de propagation de l'énergie est donc bien inférieure à c. On remarque que pour le plasma

$$v_\varphi v_g = c^2$$


c
v_φ
v_g
ω
ω_p

$\omega < \omega_p$: **Onde evanescente** On a dans ce cas

$$k^2 = i^2 \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} \rightarrow k = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = ik''$$

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} e^{-k''x} cos(\omega t)$$

On ne voit plus apparaître de fonction en $(t - kx)$, caractéristique d'une onde progressive. Il n'y a donc plus de phénomène de propagation. On parle *d'onde évanescente*

Onde évanescente

Lorsque $\omega < \omega_p$ il apparaît une onde sans propagation d'énergie et avec une décroissance de l'amplitude.

$\omega > \omega_p$ **: Milieu transparent** On a dans ce cas $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} cos(\omega t - k'x)$ Le milieu est alors "transparent", il y a propagation sans déperdition de l'onde, mais le milieu est dispersif.

On peut alors calculer les deux vitesses caractéristiques de l'onde

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$$

La vitesse de propagation de l'énergie est donc bien inférieure à c. On remarque que pour le plasma

$$v_\varphi v_g = c^2$$

Modèle de Drüde

On considère un milieu globalement neutre, dont chaque porteur de charge libre q est soumis

- une force de frottement fluide du type $\overrightarrow{f} = -\lambda.\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{v}$ la vitesse de ces porteurs par rapport au milieu
- une force de Lorentz $\overrightarrow{F} \equiv q.\overrightarrow{E}$, l'effet du champ magnétique étant négligé devant celui de la force électrique.

Pour un milieu où il n'existe qu'un seul type de porteur de charge libre. On note n la densité volumique de ces porteurs de charge, et $\overrightarrow{v}$ leur vitesse.

On étudie la propagation d'une onde sinusoïdale du type

$$\overrightarrow{E} = E_0.e^{i.(\omega t-\underline{k}.x)}.\overrightarrow{u}_z$$

Conductivité dynamique

On appelle conductivité dynamique d'un milieu, $\underline{\gamma}$, la grandeur telle que

$$\underline{\overrightarrow{j}} = \underline{\gamma}.\underline{\overrightarrow{E}}$$

✍ $$\overrightarrow{j} = \frac{n.q^2\tau}{m.(1+i.\omega\tau)}.\overrightarrow{E} \quad \textbf{avec} \quad \tau = \frac{m}{\lambda}$$

Conducteur dans l'ARQS

Pour les milieux conducteurs tels que les métaux, la conductivité dynamique est une grandeur réelle et les courant de conductions prédominent sur les courants de déplacement

Prenons l'exemple du cuivre

- $\tau = 10^{-14}\ s$ donc $i\omega\tau \ll 1\ \rightarrow\ \omega \ll \dfrac{10^{-2}}{\tau} = 10^{12}\ rad.s^{-1}$ ce qui sera vérifié pour la plupart des OEM
- $\gamma = 6.10^{7}\Omega^{-1}m^{-1}$ donc $\omega \ll \mu_0\gamma c^2\ \rightarrow\ \omega \ll \mu_0\gamma c^2 \equiv 6.10^{18}\ rad.s^{-1}$, ce qui sera encore plus facilement vérifié.

On aura alors dans ce cas une expression simplifiée de la relation de dispersion :

$$k^2 = -i\mu_0\gamma\omega \longrightarrow k = \pm\frac{1-i}{\delta} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

bilan

Une onde se propageant dans un demi-espace $x > 0$ conducteur de conductivité γ sera de la forme

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} e^{\frac{-i}{\tau}} cos\left(\omega t - \frac{x}{\tau}\right)$$

Elle pénètrera dans le métal d'une distance égale à quelques fois l'épaisseur de peau δ

> Un conducteur parfait ($\gamma \rightarrow \propto$) se comportera donc comme un miroir parfaitement réfléchissant