1. On part de l'équation de Maxwell-Gauss $div\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon}$. Par intégration : $\iiint div\overrightarrow{E}.d\tau = \iiint \dfrac{\rho}{\epsilon}.d\tau$

Par le théorème d'Ostrogradski : $\oiint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint \dfrac{\rho}{\epsilon}.d\tau = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon}$

2.
- ✓ Par étude des symétries et des invariances, $\overrightarrow{E} = E(r).\overrightarrow{e_r}$
- ✓ On choisit comme surface de Gauss un cylindre de hauteur H. Le flux à travers les deux bases est nul. Le flux à travers cette surface a donc pour expression
  $\Phi = \iint E(r).\overrightarrow{e_r} \cdot dS.\overrightarrow{e_r} = E(r).2.\pi.r.H$
- ✓ pour $a < r < b$, cette surface enferme une charge intérieure $Q_{int} = Q$
- ✓ Par le théorème de Gauss, on a donc $\overrightarrow{E} = \dfrac{Q}{\epsilon.2.\pi.r.H}.\overrightarrow{e_r}$

3. Comme $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$ et que $dV = \overrightarrow{grad}V \cdot \overrightarrow{dl}$, on a $dV = -\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl}$

$dV = -\dfrac{Q}{\epsilon.2.\pi.r.H}.\overrightarrow{e_r} \cdot \left(dr.\overrightarrow{e_r} + r.d\theta.\overrightarrow{e_\theta} + dz.\overrightarrow{e_z}\right) = -\dfrac{Q}{\epsilon.2.\pi.r.H}.dr$

Donc $V_A - V_B = \int_a^b -\dfrac{Q}{\epsilon.2.\pi.r.H}.dr = -\dfrac{Q}{\epsilon.2.\pi.H}.ln\dfrac{a}{b}$, soit $\boxed{V_A - V_B = \dfrac{Q}{\epsilon.2.\pi.H}.ln\dfrac{b}{a}}$

Comme pour un condensateur $V_A - V_B = \dfrac{Q}{C}$, on en déduit $\boxed{C = \dfrac{\epsilon.2.\pi.H}{ln\dfrac{b}{a}}}$

4. On peut passer en représentation complexe : $\underline{u} = \dfrac{1}{j.C_1.\omega}.\underline{i} + \dfrac{1}{j.C_2.\omega}.\underline{i}$. Or pour le modèle équivalent $\underline{u} = \dfrac{1}{j.C_{eq}.\omega}.\underline{i}$ donc $\dfrac{1}{C_{eq}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$

5. On a ici l'association de deux condensateurs de capacités $C_1 = \dfrac{H-h}{h_0}.C_0.\epsilon_0$ et $C_2 = \dfrac{h}{h_0}.C_0.\epsilon_{liq}$ associées en parallèle car la différence de potentiel pour les deux condensateurs est la même.

On a donc une capacité équivalente $\boxed{C_{eq} = \dfrac{H-h}{h_0}.C_0.\epsilon_0 + \dfrac{h}{h_0}.C_0.\epsilon_{liq}}$

La mesure de cette capacité dépend bien de la hauteur h du liquide dans le réservoir. Elle peut donc servir de mesure de cette hauteur.