1. Les considérations de symétrie et invariances donnent $\overrightarrow{E} = E(x).\overrightarrow{u_x}$

2. Le plan (O, Oy, Oz) est un plan de symétrie pour la distribution des charges.

Or tout point $M(0, y, z)$ appartient à ce plan. On doit donc avoir $\overrightarrow{E}(x = 0) \cdot \overrightarrow{e_x} = 0$

Vu qu'en tout point de l'espace $\overrightarrow{E} = E(x).\overrightarrow{u_x}$, cela implique que $E(x = 0) = 0$

3. En exploitant le théorème de Gauss

On choisit comme surface de Gauss un cylindre dont une base contient $M(x)$ et l'autre $M(-x)$. On raisonne pour $x > 0$

Alors $\oiint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{B_1} E(x)\overrightarrow{u_x}.dS\overrightarrow{u_x} + \iint_{B_2} E(-x)\overrightarrow{u_x}.\left(-dS\overrightarrow{u_x}\right)$

D'après les considérations de symétrie, $E(-x) = -E(x)$ car $\pi(0, 0y, Oz)$ est plan de symétrie pour la distribution, ce qui donne $\oiint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = 2.E(x).S$

Pour la charge intérieure, il faut considérer 2 cas : $\left| \begin{array}{ll} x < a & Q_{int} = 2.x.S.\rho \\ x > a & Q_{int} = 2.a.S.\rho \end{array} \right.$, ce qui donne :

$x > a,\ E(x) = \dfrac{a\rho}{\varepsilon_0}$ et $|x < a|,\ E(x) = \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0}$

Alors, pour le potentiel (sachant que vu les symétries $V(-x) = V(x)$), on se place pour $x > 0$ et on choisit $V(0) = 0$:

$x < a,\ V(x) = -\dfrac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$ et $x > a,\ V(x) = -\dfrac{\rho a}{\varepsilon_0}(x - \dfrac{a}{2})$

Il faut en effet vérifier la continuité du potentiel en $x = a$.

2. En passant par l'équation de Poisson Les équations de Maxwell et la définition du potentiel permettent d'obtenir l'équation de poisson en tout point :

$\Delta V(M) + \dfrac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0$

Or les invariances imposent $V(M) = V(x)$, ce qui donne $\dfrac{d^2V(M)}{dx^2} = \dfrac{-\rho(M)}{\epsilon_0}$

On retrouve par intégration les expressions déjà obtenues par l'autre méthode, ... mais sans rechercher les expression du champ !

4. $\sigma = \rho 2a$