

1. Il s'agit de la vitesse d'un point en rotation pure. C'est le cas dans le référentiel \mathcal{R}_1 . Ce sera notre référentiel d'étude non galiléen car en translation non uniforme dans \mathcal{R}_0

2. On exploite le TMC

✓ Le poids a pour moment $\mathcal{M}_{\Delta, \vec{P}} = -m.g.\frac{L}{2}.\sin\theta$

✓ La force \vec{f} a pour moment $\mathcal{M}_{\Delta, \vec{f}} = -\lambda.\dot{\theta}.L$

✓ La pseudo-force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m.(-\omega^2.a.\cos\omega t)\vec{e}_x$ a pour moment $\mathcal{M}_{\Delta, \vec{f}_{ie}} = m.\omega^2.a.\cos\omega t.\frac{L}{2}.\cos\theta$

Le poids a pour moment $\mathcal{M}_{\Delta, \vec{P}} = -m.g.\frac{a}{2}.\sin\theta$

$$\text{Donc } J_{\Delta}.\ddot{\theta} = -m.g.\frac{L}{2}.\sin\theta - \lambda.\dot{\theta}.L + m.\omega^2.a.\cos\omega t.\frac{L}{2}.\cos\theta$$

$$\text{Dans le cas de petits angles } \sin\theta \simeq \theta \text{ et } \cos\theta \simeq 1 : \ddot{\theta} + \frac{\lambda.L}{J_{\Delta}}\dot{\theta} + \frac{m.g.L}{2.J_{\Delta}}.\theta = \frac{m.L.a.\omega^2}{2.J_{\Delta}}.\cos\omega t$$

$$\text{Par identification : } \omega_0 = \sqrt{\frac{m.g.L}{2.J_{\Delta}}}, \sigma = L.\sqrt{\frac{L}{2.m.g.J_{\Delta}}} \text{ et } B = \frac{m.L}{2.J_{\Delta}}$$

3. Pour le régime libre les racines de l'équation caractéristique sont $r = -\sigma.\omega_0 \pm i.\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}$ donc $\theta = e^{-\sigma.\omega_0.t} \left[A.\cos(\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}) + C.\cos(\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}) \right]$

La décroissance de l'amplitude étant en $e^{-\sigma.\omega_0.t}$, on définit le temps caractéristique $\tau = \frac{1}{\sigma.\omega_0}$. On peut considérer le régime permanent établi pour $t > 5.\tau$.

4. On pose en régime permanent $\theta = \Theta_0.\cos(\omega t + \varphi)$ auquel on associe sa représentation complexe $\underline{\theta} = \Theta_0.e^{i(\omega t + \varphi)}$

$$\text{On a alors } -\omega^2\underline{\theta} + 2.i.\omega.\sigma.\omega_0.\underline{\theta} + \omega_0^2\underline{\theta} = B.a.\omega^2.e^{i(\omega t)}$$

$$\text{Soit } \Theta_0.e^{i(\omega t + \varphi)} = \frac{B.a.\omega^2.e^{i(\omega t)}}{-\omega^2 + 2.i.\omega.\sigma.\omega_0 + \omega_0^2}$$

$$\text{En prenant le module : } \Theta_0 = \frac{B.a.\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2.\sigma^2.\omega_0^2}}$$

$$5. \text{ On a } G = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2.\sigma^2.\omega_0^2}}$$

On souhaite que cette fonction de transfert soit indépendant de ω dans la gamme 20 Hz et 2 kHz. Or il s'agit d'un filtre passe-bas du second ordre de pulsation propre ω_0 . Le gain pourra donc être considéré comme indépendant de ω si $\omega \ll \omega_0$. On doit donc avoir $\omega_0 \gg 2.\pi.2.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$