1. On recherche les équations du mouvement :

- ✓ Application du PFD : $m.\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -m.g.\vec{e_z}$
- ✓ Par intégration : $\left[\vec{v}(t) - \vec{v}(t=0)\right] = -g.(t-0)\vec{e_z}$ avec $\vec{v}(t=0) = v_0.cos\alpha.\vec{e_x} + v_0.sin\alpha.\vec{e_z}$
- ✓ En intégrant une nouvelle fois, on obtient :

  $\left[\overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OM}(t=0)\right] = \vec{v}(t=0).t - g.\dfrac{t^2}{2}\vec{e_z}$

  Bilan : $\left| \begin{array}{l} x = v_0.cos\alpha.t \\ z = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + v_0.sin\alpha.t \end{array} \right.$

- ✓ A partir de ces équations paramétriques du mouvement, on en déduit l'équation du mouvement $z = f(x)$:

  On peut exprimer $t = \dfrac{x}{v_0.cos\alpha}$ et le substituer dans la seconde équation :

  $z = -\dfrac{1}{2}.g.\dfrac{x^2}{v_0^2.cos^2\alpha} + x.tan\alpha$

  ou $z = -\dfrac{1}{2}.g.\dfrac{x^2}{v_0^2}.\left(1 + tan^2\alpha\right) + x.tan\alpha$

- ✓ On a $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}.dx + \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}.d\alpha$.
  - ✘ L'altitude $(z = h)$ étant fixée, $dz = 0$
  - ✘ On veut la valeur α tel que l'abscisse x soit maximale, donc telle que $dx = 0$
  - ✘ On doit donc avoir $\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} = 0$

  $0 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right).\underbrace{dx}_{=0} + \left(-\dfrac{1}{2}.g.\dfrac{(-2).(-sin\alpha)x^2}{v_0^2.cos^3\alpha} + x.\dfrac{1}{cos^2\alpha}\right).d\alpha$

  Soit : $x = \dfrac{v_0^2}{g.tan\alpha}$

- ✓ Reste à injecter cette valeur de x dans l'équation du mouvement, ce qui nous donne :

  $h = -\dfrac{1}{2}.\dfrac{v_0^2}{g.tan^2\alpha}.\left(1 + tan^2\alpha\right) + \dfrac{v_0^2}{g}$

  Ce qui donne $tan\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1 - \frac{2.h.g}{v_0^2}}}$ donc $\boxed{x_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}.\sqrt{\dfrac{1}{1 - \frac{2.h.g}{v_0^2}}}}$

2. *Calculer la vitesse de l'obus lorsqu'il touche l'objectif.Cette question peut être traitée indépendamment...*

Le système étant conservatif, on peut en déduire que $E_{mI} = E_{mF}$, soit :

$\dfrac{1}{2}.m.v_0^2 + 0 = \dfrac{1}{2}.m.v_1^2 + m.g.h$, soit :

$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2.g.h}$