1. .

2. On étudie la masse dans le référentiel galiléen

- ✓ Le poids dérive d'une énergie potentielle $E_{p,pes} = m.g.h$ avec $h = -a.sin\theta$
- ✓ La force élastique dérive d'une énergie potentielle $E_{p,el} = \frac{1}{2}.k.\Delta l^2$ avec $\Delta l = 2.a.sin\frac{\theta}{2}$
- ✓ La réaction du support ne travaille pas.

Le système est donc conservatif d'énergie potentielle $E_p = E_{p,pes} + E_{p,el} = -m.g.a.sin\theta + 2.k.a^2.sin^2\frac{\theta}{2}$

L'équilibre est tel que $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$ soit $-m.g.a.cos\theta_{eq} + 2.k.a.2.\frac{1}{2}.cos\frac{\theta_{eq}}{2}.sin\frac{\theta_{eq}}{2} = -m.g.a.cos\theta_{eq} + k.a.sin\theta_{eq} = 0$

Soit $tan\theta_{eq} = \frac{2.m.g}{k.a}$

3. Le système étant conservatif, $\frac{dE_m}{dt} = 0$.

Pour un système en rotation, $v^2 = (a.\dot{\theta})^2$ donc $E_c = \frac{1}{2}.m/a^2.\dot{\theta}^2$

Soit $\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}.m.g.a^2.2.\dot{\theta}.\ddot{\theta} - m.g.a.\dot{\theta}.cos\theta + 2.k.a^2.\dot{\theta}.2.cos\frac{\theta}{2}.sin\frac{\theta}{2} = 0$

$m.g.a^2.\ddot{\theta} - m.g.a.cos\theta + k.a^2.sin\theta = 0$

4. On considère de petits déplacements au tour de cette position : $\theta = \theta_{eq} + \epsilon.$. Montrer que la masse oscille autour de la position d'équilibre.

On peut alors effectuer un développement limité au premier ordre pour les fonctions

$sin\theta = sin\left(\theta_{eq} + \epsilon.\right) \approx sin\theta_{eq} + \epsilon.cos\theta_{eq}$

$cos\theta = cos\left(\theta_{eq} - \epsilon.\right) \approx cos\theta_{eq} - \epsilon.sin\theta_{eq}$

On obtient alors :

$m.g.a^2.\ddot{\theta} - m.g.a.\left(cos\theta_{eq} - \epsilon.sin\theta_{eq}\right) + k.a^2\left(sin\theta_{eq} + \epsilon.cos\theta_{eq}\right) = 0$

$m.g.a^2.\ddot{\theta} + \epsilon.\left(m.g.a.sin\theta_{eq} + 2.k.a^2.cos\theta_{eq}\right) - m.g.a.cos\theta_{eq} + k.a^2.sin\theta_{eq} = 0$

Or $\ddot{\theta} = \ddot{\theta_{eq}} + \ddot{\epsilon} = \ddot{\epsilon}$ et vu la question précédentes $-m.g.a.cos\theta_{eq} + k.a^2.sin\theta_{eq} = 0$. On obtient donc l'équation différentielle :

$$m.g.a^2.\ddot{\epsilon} + \left(m.g.a.sin\theta_{eq} + 2.k.a^2.cos\theta_{eq}\right).\epsilon. = 0$$

Comme $\left(m.g.a.sin\theta_{eq} + 2.k.a^2.cos\theta_{eq}\right) > 0$, il s'agit d'un oscillateur harmonique