1. Energie potentielle

✓ Pour un point à une altitude h , $E_{p,pes} = m.g.h$, avec ici $h = l.\sin\alpha$ en prenant l'origine en O

✓ Pour un ressort de longueur l : $E_{p,el} = \frac{1}{2}.k.(l - l_0)^2$

Le système est conservatif car seules le poids et la force de rappel ont un travail non nul au cours du mouvement, et les deux dérivent d'une énergie potentielle.

$$E_{p,tot} = m.g.l.\sin\alpha + \frac{1}{2}.k.(l - l_0)^2$$

Longueur à l'équilibre

Le système est conservatif unidimensionnel de variable l , l'équilibre est donc tel que $\left(\frac{dE_{p,tot}}{dl}\right)_{eq} = 0$, soit

$$\left(m.g.\sin\alpha + \frac{1}{2}.k.2.(l - l_0)\right)_{eq} = 0$$

Ce qui donne $l_{eq} = l_0 - \frac{m.g.\sin\alpha}{k}$

2. Vu l'origine choisie, ici $l = l_{eq} + x$. Par un bilan énergétique

✓ l'énergie potentielle a pour expression (on remplace l par son expression) :

$$E_{p,tot} = m.g.(l_{eq} + x).\sin\alpha + \frac{1}{2}.k.(l_{eq} + x - l_0)^2$$

✓ Comme $\vec{OM} = x.\vec{e}_x$, $\vec{v} = \dot{x}.\vec{e}_x$ donc $E_c = \frac{1}{2}m.\dot{x}^2$

✓ Le système étant conservatif, $\frac{dE_m}{dt} = 0$, avec $E_m = \frac{1}{2}m.\dot{x}^2 + m.g.(l_{eq} + x).\sin\alpha + \frac{1}{2}.k.(l_{eq} + x - l_0)^2$

$$\text{Soit } \frac{1}{2}.2.m.\dot{x}\ddot{x} + m.g.\dot{x}.\sin\alpha + k.\dot{x}.(l_{eq} + x - l_0) = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}.x + \frac{k}{m}.(l_{eq} - l_0)g.\sin\alpha = 0$$

$$\text{Mais vu l'expression de } l_{eq} \text{ il reste } \ddot{x} + \frac{k}{m}.x + \frac{k}{m}.x = 0$$

3. On reconnaît un oscillateur avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ avec $f = \frac{2.\pi}{\omega_0}$