1. La position d'équilibre d'un système avec frottement visqueux est identique à la position d'équilibre de ce même système sans frottement visqueux. En effet le système étant à l'équilibre, $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$

On considère alors le système en l'absence de frottements visqueux. Il est conservatif et la position d'équilibre est telle que $\dfrac{dE_p}{dl} = 0$ (ici l est bien une grandeur caractéristique de l'état du système.)

Or $E_p = E_{p(pes)} + E_{p(el)} = m.g.l + \dfrac{1}{2}.k.(l - l_0)^2 + C^{te}$

On a donc à l'équilibre $l = l_{eq}$ tel que $\dfrac{dE_p}{dl} = 0 = m.g + \dfrac{1}{2}.2.k.(l_{eq} - l_0)$, soit $\boxed{l_{eq} = l_0 - \dfrac{m.g}{k}}$

On vérifie que $l_{eq} < l_0$, ce qui correspond bien à l'analyse physique.

2. On part de la configuration à l'équilibre et on tient compte de l'effet sur la longueur du ressort des déplacements des points M et C. :

$l = l_{eq} + z_M(t) - z_C(t)$

3. ✓ $\overrightarrow{F} = -k.(l - l_0).\overrightarrow{e_z} = -k.\left(z_M - z_C - \dfrac{m.g}{k}\right).\overrightarrow{e_z}$ ou $E_{p(el)} = \dfrac{1}{2}.k.\left(z_M - z_C - \dfrac{m.g}{k}\right)^2$

✓ On peut utiliser le PFD ou le TPC. Je vais développer ici l'exploitation du TPC :

$\dfrac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\overrightarrow{f}\,nc} = -\mu.\left(\overrightarrow{v}(M) - \overrightarrow{v}(C)\right)\cdot\overrightarrow{v}(M) = -\mu.(\dot{z}_M - \dot{z}_C).\dot{z}_M$, ce qui donne :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.m.\dot{z}_M^2 + m.g.z_M + \frac{1}{2}.k.\left(z_M - z_C - \frac{m.g}{k}\right)^2\right) = -\mu.(\dot{z}_M - \dot{z}_C).\dot{z}_M$$

Avec $\dfrac{d}{dt}\left(\dot{z}_M^2\right) = \dot{z}_M.\ddot{z}_M$ et $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}.k.\left(z_M - z_C - \dfrac{m.g}{k}\right)^2\right) = k.\dot{z}.\left(z_M - z_C - \dfrac{m.g}{k}\right)$, ce qui amène à :

$$m.\ddot{z}_M + m.g + k.\left(z_M - z_C - \frac{m.g}{k}\right) = -\mu.(\dot{z}_M - \dot{z}_C)$$

Soit $\ddot{z}_M + \dfrac{\mu}{m}.\dot{z}_M + \dfrac{k}{m}.z_M = \dfrac{\mu}{m}.\dot{z}_C + \dfrac{k}{m}.z_C$

4. On adopte la représentation complexe afin de résoudre le problème :

$$\left(-\omega^2 + j.\omega.\frac{\mu}{m} + \frac{k}{m}\right)\underline{z}_M = \left(j.\omega.\frac{\mu}{m} + \frac{k}{m}\right)\underline{z}_C$$

On a donc $Z_M.e^{i\omega\varphi} = \dfrac{j.\omega.\dfrac{\mu}{m} + \dfrac{k}{m}}{-\omega^2 + j.\omega.\dfrac{\mu}{m} + \dfrac{k}{m}}$

Soit $Z_M = \dfrac{\sqrt{(2.\sigma.\omega_0\omega)^2 + (\omega_0)^2}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2.\sigma.\omega_0\omega.)^2}}$