

On considère l'évolution adiabatique pour une particule de fluide. L'air étant assimilé à un gaz parfait de masse molaire M , ce modèle induit une loi d'évolution de température du type $T(z) = T_0 \cdot (1 - a \cdot z)$.

On note p_0 la pression en $z = 0$.

1. Pour une particule de fluide, il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur.
2.
$$d\vec{F} = +p(z).dx.dy.\vec{e}_z - p(z + dz).dx.dy.\vec{e}_z = -\frac{dp}{dz}.dz.dx.dy\vec{e}_z = -\frac{dp}{dz}.dy\tau\vec{e}_z$$
3. Le fluide étant considéré statique, la résultante des forces appliquées à la particule de fluide est nulle, soit
$$-\frac{dp}{dz}.d\tau\vec{e}_z + dm.\vec{g} = \vec{0}$$
, ce qui donne comme $\rho = \frac{dm}{d\tau}$, en projection sur l'axe vertical ascendant : $-\frac{dp}{dz} - \rho.\vec{g} = 0$
4. ✓ Le fluide étant compressible, la masse volumique dépendra de la pression. On doit donc relier ces termes.

L'équation d'état pour le gaz parfait appliqué à la particule de fluide $p.d\tau = dn.R.T = \frac{dm}{M}.R.T$ donne donc $\rho = \frac{M.p}{R.T}$

✓ Le bilan mécanique s'écrit alors $\frac{dp}{dz} + \frac{M.p}{R.T}.\vec{g} = 0$

avec $T = T_0 \cdot (1 - a \cdot z)$, ce qui donne :

$$\boxed{\frac{dp}{dz} + \frac{M.p}{R.T_0 \cdot (1 - a \cdot z)}.\vec{g} = 0}$$

✓ On sépare les variables avant d'intégrer : $\frac{dp}{p} = -\frac{M}{R.T_0 \cdot (1 - a \cdot z)}.g.dz$

✓ Alors $\int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{M.g}{R.T_0} \int_0^z \frac{dz}{1 - a \cdot z}$, ce qui amène à

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{M.g}{R.T_0} \cdot \left[\frac{1}{(-a)} \cdot \ln(1 - a \cdot z) \right]_0^z = \frac{M.g}{a.R.T_0} \cdot \ln(1 - a \cdot z) = \ln(1 - a \cdot z)^{\frac{M.g}{a.R.T_0}}$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{p(z) = p_0 \cdot (1 - a \cdot z)^{\frac{M.g}{a.R.T_0}}}$$