

1. Car l'écoulement est irrotationnel. On a alors $\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\Phi) = \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \text{irrotationnel} \rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{grad}(\Phi) \\ \text{incompressible} \rightarrow \text{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$ donc $\Delta \Phi(M, t) = 0$

On propose de chercher une solution sous la forme $\Phi(r, \theta) = f(r).g(\theta)$. On donne l'expression d'un Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

3. ici

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot f' \cdot g) = r \cdot f'' \cdot g + f' \cdot g$$

$$\Delta \Phi = f'' \cdot g + \frac{f' \cdot g}{r} + \frac{1}{r^2} \cdot f \cdot g'' = 0$$

$$\frac{1}{f} \cdot (r \cdot f' + r^2 \cdot f'') = -\frac{g''}{g} = K$$

4. $(\vec{v} \cdot \vec{u}_\theta)_{(v, r, \theta=0)} = (\vec{v} \cdot \vec{u}_\theta)_{(v, r, \theta=\alpha)} = 0$. Or $(\vec{v} \cdot \vec{u}_\theta) = \frac{1}{r} \cdot f \cdot g'$ donc $g'(0) = g'(\alpha) = 0$.

Seule la forme sinusoidale de la solution de l'ED peut permettre de vérifier ces conditions initiales, donc $K > 0$. Alors $g'' + K \cdot g = 0$ admet comme solution $g(\theta) = \lambda \cdot \cos(k \cdot \theta) + \mu \cdot \sin(k \cdot \theta)$ avec $k = \sqrt{K}$.

5. $\begin{cases} g'(0) = 0 \rightarrow \mu = 0 \\ g'(\alpha) = 0 \rightarrow \sin(k \cdot \alpha) = 0 \rightarrow k = n \cdot \frac{\pi}{\alpha} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$. Donc $g(\theta) = \lambda \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot \theta}{\alpha}$.

La seule valeur physiquement acceptable est $n = 1$ car dans le cas contraire on aurait pour $0 < \theta < \alpha$ la fonction $g'(\theta) = 0$, ce qui voudrait dire que la composante radiale de la vitesse serait nulle en ces points. Ce résultat est incohérent. Par conséquent

$$g(\theta) = \lambda \cdot \cos \frac{\pi \cdot \theta}{\alpha}$$

6. On considère $f(r) = \lambda \cdot r^\beta$ dans l'équation différentielle vérifiée par $f(r)$. On obtient alors $\beta^2 = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2$ soit $\beta = \frac{\pi}{\alpha}$.

7. Le potentiel des vitesses, à une constante près est donc

$$\Phi = \lambda \cdot r \frac{\pi}{\alpha} \cdot \cos \frac{\pi \cdot \theta}{\alpha}$$

On utilise alors la condition en $(r = D, \theta = 0)$ où $\vec{v} \cdot \vec{u}_r = -V_0$ ce qui donne $\lambda = \frac{-V_0}{\frac{\pi}{\alpha} D \alpha^{-1}}$

8. $\vec{v} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \cdot \vec{u}_\theta$ donne

$$\vec{v} = \frac{-V_0}{\frac{\pi}{\alpha} D \alpha^{-1}} \cdot r \frac{\pi}{\alpha}^{-1} \left(\cos \frac{\pi \cdot \theta}{\alpha} \cdot \vec{u}_r - \sin \frac{\pi \cdot \theta}{\alpha} \cdot \vec{u}_{\theta} \right)$$