

On considère un écoulement incompressible, permanent et irrotationnel d'un fluide dans un dièdre d'angle α .

Le fluide est éjecté à une distance D de l'arrête du cube avec une vitesse $\vec{v}_0$, dirigée vers l'arrête. Les effets de bords seront négligés dans la direction perpendiculaire au plan de la figure.

1. Pourquoi peut-on définir un potentiel $\Phi(M, t)$ caractérisant l'écoulement ? Donner les composantes de la vitesse en fonction de Φ , dans la base $\mathfrak{B}\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\}$.
2. Quelle relation vérifie le potentiel $\Phi(M, t)$?

On propose de chercher une solution sous la forme $\Phi(r, \theta) = f(r) \cdot g(\theta)$. On donne l'expression d'un Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

3. Déterminer les équations différentielles vérifiées par $f(r)$ d'une part et par $g(\theta)$ d'autre part. (*On pourra définir une constante K*).
4. Préciser les conditions aux limites et en déduire des conditions sur $g'(0)$ et $g'(\alpha)$. Montrer que cela impose le signe de la constante K .
5. En déduire, en le justifiant, que $g(\theta) = \lambda \cdot \cos \frac{\pi \cdot \theta}{\alpha}$.
6. Montrer que $f(r) = \lambda \cdot r^\beta$ est solution de l'équation différentielle vérifiée par $f(r)$. Exprimer β .
7. Déterminer l'expression de la constante λ .
8. Exprimer le champ des vitesses.