On étudie un écoulement (E) irrotationnel et permanent d'un fluide incompressible ($\mu = C^{te}$) autour d'un cylindre d'axe $OZ$ et de rayon $R$, en rotation uniforme ($\overrightarrow{\Omega} = \Omega.\overrightarrow{u_z}$).
Très loin du cylindre, le fluide a la vitesse normale à l'axe $OZ$. On repèrera un point du fluide par ses coordonnées cylindriques $(r, \theta)$. On peut considérer l'écoulement comme la superposition de deux écoulements potentiels

$$\begin{cases} E_1 : \varphi_1 = -\left(1 + \dfrac{R^2}{r^2}\right).r.v_0.cos\theta \\ E_2 : \varphi_2 = -k.\theta \text{ avec } k \text{ une constante positive} \end{cases}$$

1. Déterminer le champ des vitesses du fluide en $M$. Vérifier que ce champ correspond bien à un écoulement d'un fluide incompressible.
2. Calculer la circulation $\zeta$ du champ de vitesse le long d'une courbe fermée.
3. On pose $\alpha = \dfrac{k}{R.v_0}$ Déterminer le nombre de points où la vitesse s'annule. Représenter les lignes de champ selon les valeurs de $\alpha$.

*Donnée :*Pour un scalaire $U(r, \theta, z)$, dans $\mathfrak{B}\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\}$ : $\Delta U = \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r.\dfrac{\partial U}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}.\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$