Le capteur de vitesse est constitué d'un tube cylindrique d'axe Oz, de diamètre $2a$, dans lequel s'écoule en régime permanent, le fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η connue. Soit $\Delta P = P_1 - P_2$ la différence de pression entre deux sections S_1 et S_2 du tube, située autour des points O_1 et O_2 de côte z_1 et z_2, et distantes de $O_1O_2 = L$. On rappelle que la densité volumique de force de viscosité s'écrit $\eta.\Delta\overrightarrow{v}$. On négligera les forces de pesanteur. Le référentiel d'étude est supposé galiléen.

1. On suppose que l'écoulement est laminaire et s'effectue suivant $\overrightarrow{e_z}$. Quelle hypothèse nous conduit à chercher $\overrightarrow{v}$ sous la forme $\overrightarrow{v} = v(r,z).\overrightarrow{e_z}$ et P sous la forme $P(r,z)$?

2. Montrer que l'expression de la vitesse $v(r,z)$ est indépendante de z et ne dépend donc que de r.

3. En appliquant l'équation de Navier-Stokes, montrer que P ne dépend que de z et que :

$$\frac{dP}{dz} = K_1 \qquad \frac{\eta}{r}\left(\frac{d}{dr}\left(r.\frac{dv}{dr}\right)\right) = K_1 \text{ avec } K_1 = C^{te}$$

4. Préciser les conditions aux limites qui permettent de déterminer $P(z)$ et $v(r)$.

5. Exprimer K_1 et $v(r)$ en fonction de ΔP, η, L, a, r et z.

6. Montrer que le débit volumique peut se mettre sous la forme $D_v = K_2.\Delta P$, où K_2 et une constante que l'on exprimera en fonction de a, L et η.

7. On définit la vitesse moyenne du lubrifiant par $v_{moy} = \dfrac{D_v}{\pi.a^2}$, montrer que $v_{moy} = K_3.\Delta P$, où K_3 est une constante que l'on exprimera en fonction de a, L et η.