1. Les lignes de courant seront des cercles : $\vec{v} = v(r, \theta, z) \cdot \vec{e}_\theta$
Si on néglige l'effet de la pesanteur, alors $v(r, \theta, z) = v(r, \theta)$

Le liquide étant incompressible, l'écoulement sera incompressible : $\frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} = 0$ soit $v(r, \theta) = v(r)$.

2. La dérivation particulaire s'écrit, en régime stationnaire :
$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ v \\ 0 \end{array} \cdot \left| \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) \vec{v} = \left(v \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (v \cdot \vec{e}_\theta) = \frac{v^2}{r} \cdot \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\frac{v^2}{r} \cdot \vec{e}_r$$

L'équation de Navier et Stokes donne :
$$\begin{array}{c} -\rho \cdot \frac{v^2}{r} \\ 0 \\ 0 \end{array} = - \begin{array}{c} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} + \eta \cdot \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{v}{r} \right) \\ 0 \end{array}$$

Mais les symétries permettent de dire que p ne dépend que de r . Ainsi l'équation se réduit à :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{v}{r} \right) = 0$$

Cette équation s'écrit également sous la forme : $\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = A$

La composante selon $\vec{e}_r$ de l'équation pourrait nous permettre de connaître l'évolution de $p(r)$, mais ceci n'est pas nécessaire dans cet exercice.

3. EDHA : $\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0$ avec comme solution : $v_{EDHA} = -\frac{B}{r}$

Pour la solution particulière, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante Solution particulière $v_{part} = -\frac{K(r)}{r}$, ce qui en réinjectant dans l'équation donne $K'(r) = -A \cdot r$ donc $K(r) = \frac{-A \cdot r^2}{2}$ amenant à la solution particulière

$$v_{part} = \frac{-A \cdot r^2}{2} \cdot \frac{-1}{r} = \frac{A \cdot r}{2}$$

On obtient alors la forme complète de la solution
$$v(r) = -\frac{B}{r} + \frac{A \cdot r}{2}$$

4. On doit vérifier que
$$\begin{cases} v(a) = 0 = \frac{A \cdot a}{2} - \frac{B}{a} \\ v(b) = b \cdot \Omega = \frac{A \cdot b}{2} - \frac{B}{b} \end{cases}$$

Soit $A = \frac{2 \cdot b^2 \cdot \Omega}{b^2 - a^2}$ et $B = \frac{a^2 \cdot A}{2}$

5. A l'interface en $r = b$ les forces surfaciques de viscosité ont pour expression

En un point P du cylindre : $d\Gamma_r = (\vec{OP} \wedge \vec{\sigma}) \cdot \vec{e}_z \cdot dS$

$$d\Gamma_r = \pm r \cdot \eta \cdot r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) dS$$

Intégré sur toute la surface, cela donne : $\Gamma_r = \pm \eta \cdot 4 \cdot B \cdot \pi \cdot H = \pm \eta \cdot 4 \cdot \pi \cdot H \cdot \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot \Omega}{b^2 - a^2}$

6. En régime permanent, le couple moteur doit compenser le couple résistif :

$$\Gamma = \eta \cdot 4 \cdot B \cdot \pi \cdot H = \pm \eta \cdot 4 \cdot \pi \cdot H \cdot \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot \Omega}{b^2 - a^2}$$