1. Écoulement stationnaire donc $v(x,z,t) = v(x,z)$.
Le fluide étant incompressible : $div\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ donc $v(x,z) = v(z)$

2. ✓ Le régime est permanent donc $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$

✓ $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v} = \left(v\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v.\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{0}$

✓ On en déduit que $\overrightarrow{a} = \dfrac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \overrightarrow{0}$

3. Navier-Stokes : $\overrightarrow{0} = \rho.\overrightarrow{g} - \overrightarrow{grad}p + \eta\Delta\overrightarrow{v}$ donc $\begin{cases} Ox : \dfrac{\partial p}{\partial x} = \eta\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ Oz : \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho.g \end{cases}$

4. L'intégration de la seconde équation permet d'obtenir

$$p(x,z) = -\rho.g.z + p(x,0)$$

La pression évolue donc en fonction de z de 1 bar tous les 10 m. Si $a \ll 10\ m$, on peut alors considérer $p(x)$.

5. On a alors $\dfrac{d^2p(x)}{dx^2} = \eta\dfrac{d^2v(z)}{dz^2}\ \forall(x,z)$. Cette égalité du type $f(x) = g(z)$ est donc nécessairement constante, d'où le gradient de pression constant.

6. $v(-a) = v(a) = 0$. $\eta.v(z) = -\dfrac{1}{2}.A.z^2 + B.z + C$. Les conditions aux limites donnent

$$v(z) = v_0.\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \qquad p(x) = p_0 - \frac{2.\eta.v_0}{a^2}.x$$

7. Parabole.
$\overrightarrow{\Omega} = \dfrac{1}{2}.\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = -\dfrac{v_0.z}{a^2}.\overrightarrow{u_y}$. L'écoulement est donc rotationnel(les forces de viscosité ont tendance à créer un moment des forces non nul... les lignes de champ sont pourtant rectilignes !!!!