

1. Par conservation du débit volumique : $v_e.S_e = v.S = v_s.S_s$

2. On peut appliquer la relation de Bernoulli entre

✓ L'entrée et la section juste avant l'hélice : $\frac{v_e^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{p_+}{\mu}$

✓ La section juste après l'hélice et la sortie : $\frac{v^2}{2} + \frac{p_-}{\rho} = \frac{v_s^2}{2} + \frac{p_0}{\mu}$

3. La vitesse est considérée comme égale avant et après le passage au travers de l'hélice, donc

$$\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \vec{0} = (+p_+ - p_-).S + \vec{F}_{helice \rightarrow fluide}, \text{ ce qui donne la relation proposée.}$$

4. $\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \rho.D_v.(\vec{v}_s - \vec{v}_e) = \oint_{\Sigma} p_0.d\vec{S} + \vec{F}_{helice \rightarrow fluide}$

Avec $D_v = v.S$, ce qui donne $\rho.v.S.(v_s - v_e) = (p_- - p_+).S$

5. Comme $(p_- - p_+).S = S.\frac{v_s^2 - v_e^2}{2}.\rho$ en déduit donc immédiatement que $v = \frac{v_e + v_s}{2}$

6. $\rho.D_v.\frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) = p_0.S_e.v_e - p_0.S_s.v_s - \mathcal{P} = -\mathcal{P}$

Avec $D_v = S.v = S.\frac{v_e + v_s}{2}$ donc $\mathcal{P} = \rho.S.\frac{v_e + v_s}{2}.\frac{1}{2}(v_e^2 - v_s^2) = \rho.\frac{v_e^2}{2}.S.v_e.\frac{1}{2}(1+x).(1-x^2)$

Ce qui donne $f(x) = \frac{1}{2}(1+x).(1-x^2)$

7. On a l'énergie cinétique d'une masse $\delta m_0 = v_e.dt.S$ entrant dans ce tube de courant pendant la durée dt : $dE_{c0} =$

$$\rho.v_e.dt.S.\frac{v_e^2}{2}, \text{ ce qui donne la puissance } \mathcal{P}_0 = \frac{dE_{c0}}{dt} = \rho.v_e.S.\frac{v_e^2}{2}$$

8. On a donc $\mathcal{P} = \rho.\frac{v_e^2}{2}.S.v_e = \mathcal{P}_0.f(x)$, soit $f(x) = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}$ qui correspond au rendement.

Ce rendement est maximum pour $x = \frac{1}{3}$, ce qui donne alors $\mathcal{P} = \frac{8}{27}.\rho.S.v_e^3 = 2,1 \text{ MW}$

9. On a alors $\frac{S_s}{S} = \frac{v}{v_s} = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 2.$

On a donc $L > \sqrt{2}.D = 112 \text{ m}$ afin que les éoliennes ne se perturbent pas.