

1. Le puits est le siège d'ondes stationnaires avec des nœuds en $x = 0$ et $x = a$. On a donc $\varphi(x) = \varphi_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}$ et

$$E_n = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot \hbar^2}{2 \cdot m \cdot a^2}. \text{ (voir le cours pour plus de détails)}$$

2. On a $E_1 = \frac{\pi^2 \cdot \hbar^2}{2 \cdot m \cdot a^2}$, on a $E_2 = 4 \cdot \frac{\pi^2 \cdot \hbar^2}{2 \cdot m \cdot a^2}$

$$\text{Alors } E_m = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{5}{2} \frac{\pi^2 \cdot \hbar^2}{2 \cdot m \cdot a^2} \text{ et } \Delta E = \frac{E_2 - E_1}{2} = \frac{3}{2} \frac{\pi^2 \cdot \hbar^2}{2 \cdot m \cdot a^2}$$

$$\Psi(x, t) = A \cdot \left(\sin \frac{\pi \cdot x}{a} \cdot e^{-\frac{i \cdot E_1}{\hbar} t} + \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot e^{-\frac{i \cdot E_2}{\hbar} t} \right)$$

$$\Psi(x, t) = A \cdot e^{-\frac{i \cdot E_m}{\hbar} t} \left(\sin \frac{\pi \cdot x}{a} \cdot e^{\frac{i \cdot \Delta E}{\hbar} t} + \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot e^{-\frac{i \cdot \Delta E}{\hbar} t} \right)$$

Un état stationnaire correspond à un état pour lequel la densité de probabilité de présence en x est indépendante du temps. On doit donc déterminer l'expression de ρ :

$$\rho = |\Psi(x, t)|^2 = \Psi \cdot \Psi^* = A^2 \left(\sin \frac{\pi \cdot x}{a} \cdot e^{\frac{i \cdot \Delta E}{\hbar} t} + \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot e^{-\frac{i \cdot \Delta E}{\hbar} t} \right) \cdot \left(\sin \frac{\pi \cdot x}{a} \cdot e^{-\frac{i \cdot \Delta E}{\hbar} t} + \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot e^{\frac{i \cdot \Delta E}{\hbar} t} \right)$$

$$\rho = A^2 \left[\sin^2 \frac{\pi \cdot x}{a} + \sin^2 \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a} + \sin \frac{\pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a} \left(e^{\frac{2i \cdot \Delta E}{\hbar} t} + e^{-\frac{2i \cdot \Delta E}{\hbar} t} \right) \right]$$

$$\rho = A^2 \left[\sin^2 \frac{\pi \cdot x}{a} + \sin^2 \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a} + 2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \Delta E}{\hbar} t \right) \right]$$

ρ dépend du temps, il ne s'agit donc pas d'un état stationnaire. On remarque donc qu'une combinaison d'états stationnaires peut amener à un état non stationnaire.