

1. Comme $E > V(x) = 0$, on obtient $\varphi(x) = A.e^{ikx} + A'.e^{-ikx}$ avec $k = \frac{\sqrt{2.E.m}}{\hbar}$

On recherche le mode symétrique : $\varphi(x) = \varphi(-x)$, ce qui amène à $A = A'$, donc $\varphi(x) = A.(e^{ikx} + e^{-ikx}) = 2.A.\cos(kx)$

2. Comme $E < V_0$, on obtient $\varphi(x) = B.e^{Kx} + C.e^{-Kx}$ avec $K = \frac{\sqrt{2.(V_0 - E).m}}{\hbar}$

3. On doit vérifier que $\varphi_2\left(\frac{3.a}{2}\right) = 0 = B.e^{K\frac{3.a}{2}} + C.e^{-K\frac{3.a}{2}}$, ce qui donne $\varphi_2(x) = B.(e^{Kx} + e^{-K(3.a-x)})$

4. Comme on recherche le mode symétrique, on doit avoir $\varphi_3(x) = B.(e^{-Kx} + e^{-K(3.a+x)})$

5. On exploite la continuité de $\varphi(x)$ et de sa dérivée en $x = \frac{a}{2}$:

$$\begin{cases} 2.A.\cos\frac{k.a}{2} = B.\left(e^{K\frac{a}{2}} + e^{-K(3.a-\frac{a}{2})}\right) \\ -2.k.A.\sin\frac{k.a}{2} = K.B.\left(e^{K\frac{a}{2}} - e^{-K(3.a-\frac{a}{2})}\right) \end{cases}$$

On obtient donc $\tan\frac{k.a}{2} = -K.\frac{e^{K\frac{a}{2}} - e^{-K(3.a-\frac{a}{2})}}{e^{K\frac{a}{2}} + e^{-K(3.a-\frac{a}{2})}}$ avec $K^2 + k^2 = \frac{2.m.E}{\hbar^2}$

6. On doit vérifier la normalisation de la fonction d'onde. Pour le mode symétrique : $\int_0^{\frac{3.a}{2}} |\varphi(x)|^2 .dx = \frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$2.\left[\int_0^{\frac{a}{2}} |2.A.\cos(kx)|^2 .dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3.a}{2}} |B.(e^{Kx} + e^{-K(3.a-x)})|^2 .dx\right] = 1$$