

1. On effectue un bilan de masse pour le système ouvert correspondant au parallélépipède $L.dx.h$:

✓ Il entre par la face située en x une masse $\delta m_e = \rho(x,t).v(x,t).dt.L.h(x,t)$

✓ Il sort par la face située en $x + dx$ une masse $\delta m_s = \rho(x + dx,t).v(x + dx,t).dt.L.h(x,t)$

✓ $m(x,t) = \rho.L.dx.h(x,t)$ $m(x,t + dt) = \rho.L.dx.h(x,t + dt)$

✓ Le bilan de masse s'écrit $m(x,t + dt) = m(x,t) + \delta m_e - \delta m_s$

Soit, le fluide étant incompressible : $\frac{\partial(h)}{\partial t} = -\frac{\partial(v)}{\partial x}$

2. D'après la statique des fluides : $p(x,y,t) = p_0 + \rho.g.(h(x,t) - y)$

3. On applique l'équation d'Euler pour une particule de fluide :

$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} = v(x,t) \cdot \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \simeq \vec{0}$ car c'est un terme quadratique

Donc $\frac{D\vec{v}}{dt} \simeq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

L'équation d'Euler s'écrit alors, selon \vec{e}_x : $\rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

On remarque que cette équation donne également une composante selon \vec{e}_y non nulle. La vitesse aura donc une composante verticale, mais que l'on a négligée.

Ne pas oublier que h dépend de x , par conséquent $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho.g.\frac{\partial h}{\partial x}$, ce qui donne

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g.\frac{\partial h}{\partial x}$$

4. Par découplage des équation, on obtient $c = \sqrt{g.h_0}$

5. SI $k.h_0 \ll 1$, alors $\tanh(k.h_0) \simeq 1$, ce qui donne $\omega^2 = h_0 \cdot \left(g.k^2 + \frac{\gamma}{\rho} . k^4 \right)$.

En ne conservant que le terme de plus bas degré, on obtient $\omega^2 \simeq h_0.g.k^2$, ce qui correspond bien à la relation de dispersion obtenue précédemment.