

1. On utilise l'une des équations de couplage, par exemple l'équation d'Euler $:= \mu_0 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial t} \cdot \vec{e}_r = -\overrightarrow{grad} p_1$ en considérant l'approximation acoustique.

$$\text{On en déduit que } \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \cdot \left[-\frac{p_0}{r^2} \cdot e^{i(\omega t - k \cdot r)} - \frac{i \cdot p_0 \cdot k}{r} \cdot e^{i(\omega t - k \cdot r)} \right]$$

$$\text{Soit } \underline{v_1} = \frac{p_0}{i \cdot \omega \mu_0} \cdot \left[\frac{1}{r^2} \cdot e^{i(\omega t - k \cdot r)} + \frac{i \cdot k}{r} \cdot e^{i(\omega t - k \cdot r)} \right]$$

2. On n'oublie pas de repasser en grandeurs réelles :

$$v_1 = \frac{p_0}{\omega \mu_0} \cdot \left[\frac{1}{r^2} \cdot \sin(\omega t - k \cdot r) + \frac{k}{r} \cdot \cos(\omega t - k \cdot r) \right] \text{ et } p_1 = \frac{p_0}{r} \cos(\omega t - k r)$$

$$\text{Alors } \Pi = \frac{p_0}{\mu_0 \cdot \omega \cdot r^2} \left[\frac{1}{r} \cdot \cos(\omega t - k \cdot r) \cdot \sin(\omega t - k \cdot r) + k \cdot \cos^2(\omega t - k \cdot r) \right]$$

$$r \ll \lambda \rightarrow \frac{1}{r} \gg \frac{1}{\lambda} \text{ soit } \frac{1}{r} \gg \frac{k}{2 \cdot \pi}$$

$$\text{Pour } r \ll \lambda, \Pi \equiv \frac{p_0}{\mu_0 \cdot \omega \cdot r^2} \frac{1}{r} \cdot \cos(\omega t - k \cdot r) \cdot \sin(\omega t - k \cdot r) \text{ et } \langle \Pi \rangle = 0$$

$$\text{Pour } r \gg \lambda, \Pi \equiv \frac{p_0}{\mu_0 \cdot \omega \cdot r^2} \cdot k \cdot \cos^2(\omega t - k \cdot r) \text{ et } \langle \Pi \rangle = \frac{p_0}{2 \cdot \mu_0 \cdot \omega \cdot r^2} \cdot k$$

L'intensité sonore sera donc non nulle pour $r \gg \lambda$

3. On a $\mathcal{P} = \iint \langle \vec{P}_i \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{p_0}{2 \cdot \mu_0 \cdot \omega \cdot r^2} \cdot k \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = C^{te}$

4. A l'interface avec la sphère, les couches de fluide auront nécessairement une vitesse $v(r_0) = \dot{r} = -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ or

$$v(r_0) = \frac{p_0}{\mu_0 \cdot \omega \cdot r_0^2} \cdot \sin(\omega t - k \cdot r_0) \text{ soit } p_0 = a \cdot \omega^2 \cdot \mu_0 \cdot r_0^2$$

5. Il suffit de remplacer p_0 dans l'expression obtenue. On s'aperçoit que pour obtenir une puissance constante, on doit diminuer la taille de la source si la pulsation augmente.