1. On applique les lois de Kirchhoff

$$\checkmark \text{ Loi des nœuds : } \underline{i}(x, t) = \underline{i}(x + dx, t) + dC \cdot \frac{\partial \underline{u}(x + dx, t)}{\partial t}$$

$$\text{Soit } \underline{i}(x, t) \equiv \underline{i}(x, t) + \frac{\partial \underline{i}}{\partial x} \cdot dx + \Gamma \cdot dx \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\underline{u}(x) + \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \cdot dx \right]$$

$$\text{Avec un DL au premier ordre : } \frac{\partial \underline{i}}{\partial x} + \Gamma \cdot \frac{\partial \underline{u}(x, t)}{\partial t} = 0$$

$$\checkmark \text{ Loi de mailles : } \underline{u}(x, t) - dL \cdot \frac{\partial \underline{i}(x, t)}{\partial t} - \underline{u}(x + dx, t) = 0$$

$$\text{Avec un DL au premier ordre : } \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} + \Lambda \cdot \frac{\partial \underline{i}(x, t)}{\partial t} = 0$$

2. Il faut découpler les équations. L'idée est de faire apparaître des dérivées équivalentes dans les deux équations. Pour cela on va dériver la première par rapport à t , la seconde par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 \underline{i}}{\partial x \partial t} + \Gamma \cdot \frac{\partial^2 \underline{u}(x, t)}{\partial t^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} + \Lambda \cdot \frac{\partial \underline{i}(x, t)}{\partial t \partial x} = 0$$

Le théorème de Schwarz donne : $\frac{\partial^2 \underline{i}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \underline{i}}{\partial t \partial x}$, donc :

$$\frac{1}{\Lambda} \cdot \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} + \Gamma \cdot \frac{\partial^2 \underline{u}(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

On peut alors se ramener à l'équation de d'Alembert avec $c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}}$

3. On exploite l'une des deux équations de couplage liant $\underline{u}$ et $\underline{i}$: $\frac{\partial \underline{i}}{\partial x} + \Gamma \cdot \frac{\partial \underline{u}(x, t)}{\partial t} = 0$

$$\text{Soit } \frac{\partial \underline{i}}{\partial x} = -\Gamma \cdot j \cdot \omega \cdot U_0 \cdot e^{j(\omega t - k \cdot x)}$$

Le phénomène étant ondulatoire, il n'y a pas de composante continue pour les vibrations, donc :

$$\underline{i} = -\Gamma \cdot j \cdot \omega \cdot U_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot k} \cdot e^{j(\omega t - k \cdot x)} = +\Gamma \cdot \frac{\omega}{k} \cdot U_0 \cdot e^{j(\omega t - k \cdot x)}$$

Or la relation de dispersion donne $\frac{\omega}{k} = c$, donc $\Gamma \cdot \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$

$$\text{Soit } \underline{i}(x, t) = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \cdot \underline{u}(x, t)$$

4. Aux bornes de la résistance R en $x = L$, on doit vérifier la loi d'Ohm : $\underline{u}(L, t) = R \cdot \underline{i}(L, t)$

Vu la question précédente : $\underline{i}(L, t) = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \cdot \underline{u}(L, t)$, donc :

$$\underline{u}(L, t) = R \cdot \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \cdot \underline{u}(L, t), \text{ soit } \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

Il s'agit de l'impédance caractéristique du câble