1. Le fil de torsion liant les pendules $i-1$ et i exerce sur le pendule n un couple $-C.(\theta_i - \theta_{i-1})$
Le fil de torsion liant les pendules $i+1$ et i exerce sur le pendule n un couple $+C.(\theta_i - \theta_{i-1})$
Alors $J_\Delta.\ddot{\theta}_i = C.(\theta_{i+1} - \theta_i) - C.(\theta_i - \theta_{i-1})$
2. On peut effectuer un développement limité au second ordre :
$\theta_{i+1} = \theta(z+h) \simeq \theta(z) + h.\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \dfrac{h^2}{2}.\dfrac{\partial\theta^2}{\partial z^2}$
$\theta_{i-1} = \theta(z-h) \simeq \theta(z) - h.\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \dfrac{h^2}{2}.\dfrac{\partial\theta^2}{\partial z^2}$
3. Effectuer un développement limité à l'ordre 2 : avec $c = \sqrt{\dfrac{C.h^2}{J_\Delta}}$,
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0$$
4. On exploite les conditions aux limites : $\theta(0,t) = \theta(H,t) = 0$ $\theta(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0n}.cos(\omega_n.t + \psi).cos(\varphi) = 0$ ce qui impose $cos(\varphi) = 0$. On peut choisir $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$
$\theta(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0n}.cos(\omega_n.t + \psi).sin(k_n.H) = 0$ ce qui impose $sin(k_n.H) = 0$ soit $k_n = \dfrac{n.\pi}{H}$
L'équation d'Alembert permet d'en déduire $\omega_n = k_n.c$
5. L'existence de 4 ventres pour un régime libre correspond à $n = 4$, soit à la pulsation $\omega_4 = \dfrac{4.\pi}{H}.c$
Le système excité à cette pulsation va entrer en résonance dans ce mode. On peut donc en déduire
$$c = \sqrt{\frac{C.h^2}{J_\delta}} = \frac{\Omega.H}{4.\pi}$$
$$C = \frac{J_\delta.\Omega^2.H^2}{h^2.16.\pi^2}$$
Ce qui donne $C.h^2 = 45,5.10^{-6}$
Donc, si $h = 5\ cm$, on obtient $C = 1,8.10^{-4}\ N.m.rad^{-1}$