



On notera $J_{\Delta} = \frac{1604}{15} . m . a^2$ le moment d'inertie d'un module par rapport à l'axe des câbles.

Une échelle de perroquet est constituée de barreaux de masse m et de longueur $8.a$ auxquels on accroche à chaque extrémité deux boules de rayon a et de masse $2.m$ (l'ensemble constituant un module).

le barreau i est repéré par sa position angulaire θ_i

Ces barreaux sont reliés entre eux par un câble de longueur h .

La rotation de ce câble à ses deux extrémités d'un angle α par rapport à sa position d'équilibre crée un couple de forces de rappel de moment, en valeur absolue

$$\Gamma = C . |\alpha| \text{ avec } C > 0$$

Ce couple tend à ramener le câble dans sa position initiale.

Chaque barreau peut osciller dans le plan horizontal.

1. Appliquer le Théorème de Moment Cinétique au barreau i et en déduire une relation entre $\ddot{\theta}_i$, θ_{i+1} , θ_i et θ_{i-1} .
Vous exprimerez notamment les couples de rappel exercés par les câbles reliant le barreau i aux barreaux $i-1$ et $i+1$, en vérifiant la cohérence de vos résultats à partir de cas particuliers.

2. En choisissant comme notation $\theta_i = \theta(z)$, que deviennent les expressions θ_{i-1} et θ_{i+1} .

3. On considère $h \ll a$. On peut alors assimiler h à dz .

En effectuant des développements limités à l'ordre approprié, montrer que $\theta(z)$ est solution de l'équation différentielle du type

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

Exprimer c . On considère désormais ce modèle correspondant à l'approximation des milieux continus.

4. Cette échelle est fixée à ses deux extrémités en $z = O$ et $z = H$. On propose alors une solution du type

$$\theta(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0n} . \cos(\omega_n . t + \psi) . \cos(k_n . x + \varphi)$$

Exprimer k_n et relier ω_n à k_n .

5. On remplace l'une des extrémités par un petit oscillateur imposant au câble une rotation $\theta(0, t) = \theta_0 . \cos(\Omega t)$. En faisant varier Ω , on observe des résonances du système. Par exemple, pour $L = 2 \text{ m}$, $\Omega = 110 \text{ rad.min}^{-1}$, on observe 4 ventres d'oscillation de grande amplitude. Sachant que $a = 1 \text{ cm}$ et $m = 50 \text{ g}$, en déduire la valeur de C .