1. Considérons un ressort de longueur L et de raideur K : $\overrightarrow{F} = \pm K.\Delta L\overrightarrow{u}$

S'il correspond à une série de N ressorts de raideur k, à l'extrémité de chacun de ces ressorts : $\overrightarrow{f} = \pm K.\Delta l\overrightarrow{u}$ avec

$$\left| \begin{array}{l} f = F \\ \Delta l = \dfrac{\Delta L}{N} \end{array} \right.$$

Donc $\dfrac{1}{K} = \dfrac{N}{k}$

Or une tranche de longueur dx a une raideur k_{dx} avec $N = \dfrac{L}{dx}$ donc :

$$\boxed{k_{dx} = K\frac{L}{dx}}$$

2. $\Delta(dx) = (\xi(x+dx) - \xi(x)) = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}(x).dx$

3. Donc, si on étudie une tranche dx du ressort, le pfd donne

$$\mu dx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \underbrace{-K\frac{L}{dx}.\frac{\partial\xi}{\partial x}(x).dx}_{gauche\rightarrow\ dx} + \underbrace{K\frac{L}{dx}.\frac{\partial\xi}{\partial x}(x+dx).dx}_{droite\rightarrow\ dx}$$

$$\mu.dx.\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{K}{L}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial\xi}{\partial x}(x)\right) = \frac{K}{L}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.dx$$

4. L'équation de propagation précédente donne

$$g(x) = A.cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + \varphi)$$

La condition aux limites $x = 0$ donne $g(x) = A.sin\left(\dfrac{\omega}{c}x\right)$

La condition en $x = L$ est obtenue en appliquant le pfd à la masse m. On se rappelle que la force de rappel s'écrit $\overrightarrow{f} = \pm k_{dx}\dfrac{\partial\xi}{\partial x}dx\overrightarrow{u_x} = \pm K.L.\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$ donc, en $x = L$:

$$m.\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -K.L.\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

$$m.(-\omega^2)sin\frac{\omega}{c}.sin\omega t = -K.L.\left(-\frac{\omega L}{c}\right)cos\frac{\omega L}{c}.sin\omega t$$

$$m.(-\omega^2)sin\frac{\omega L}{c} = -K.L.\left(\frac{\omega L}{c}\right)cos\frac{\omega}{c}$$

$$m.\omega.\frac{\omega L}{c}\frac{c}{\omega L}tan\frac{\omega L}{c} = -\frac{K.L}{c}.$$

D'où par simplification l'expression proposée.

Ce raisonnement reprend l'étude de la perturbation par une masse d'une corde vibrante...