

1. $\omega_0 = \frac{\pi \cdot c}{L}$

2. L'anneau, étudié dans le référentiel galiléen, est soumis à son poids, à la réaction de la tige ainsi qu'à la tension de la corde.

En choisissant les notations du cours, en considérant l'angle α au niveau de l'anneau, on aura

$$\vec{T}_{\text{corde} \rightarrow \text{anneau}} = T \cdot (-\cos\alpha \cdot \vec{e}_x - \sin\alpha \cdot \vec{e}_y)$$

Avec comme on l'a montré en cours $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$

La projection du PFD selon l'axe OY donne alors :

$$M \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{(L,t)} = -T \cdot \sin\alpha - M \cdot g, \text{ ce qui donne donc, en considérant } \sin\alpha \equiv \alpha \text{ et en négligeant le poids :}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{(L,t)} = -\frac{M}{T} \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{(L,t)}$$

3. On propose la forme générale $y(x, t) = Y_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$. On a deux C.A.L à vérifier :

✓ en $x = 0 : y(0, t) = 0 \quad \forall t$ soit $\varphi = 0$

✓ en $x = L : \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{(L,t)} = -\frac{M}{T} \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{(L,t)}$

Or $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) = -\omega^2 \cdot y(x, t)$ et $\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = Y_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot k \cdot \cos(k \cdot x)$

On obtient donc $Y_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot k \cdot \cos(k \cdot L) = -\frac{M}{T} \cdot [-\omega^2 \cdot Y_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(k \cdot L)]$

Montrer que les modes propres vérifient la relation $f(\omega) = g(\omega) : \tan\left(\frac{\pi \cdot \omega}{\omega_0}\right) = \frac{T}{M \cdot c \cdot \omega}$

4. Pour la résolution numérique :

✓ On recherche l'égalité des fonctions $f(\omega)$ et $g(\omega)$, caractérisant les modes propres. C'est l'objectif du test 1 : si $f(\omega) - g(\omega)$ change de signe, c'est que l'on est passé par la valeur nulle.

Cependant on doit exclure les valeurs $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2} + p$ pour lesquelles $\tan \frac{\omega}{\omega_0}$ n'est pas définie et par conséquent qui ne peuvent correspondre à des mode propre. On doit donc vérifier que $f(\omega)$ est bien une fonction croissante.

✓ Vu les valeurs choisies, $\omega_0 = 10^2 \cdot \pi = 314 \text{ rad.s}^{-1}$

La liste renvoyée par le script nous donne les valeurs de $\frac{\omega_n}{\omega_0}$ pour le mode n , On a donc les modes propres :

$\omega_1 = 0,385.314 \text{ rad.s}^{-1}$ etc...