Données : $\int_0^a sin^2\frac{\pi.z}{a}.dz = \int_0^a cos^2\frac{\pi.z}{a}.dz = \frac{a}{2}$

1. Propagation dans le vide $\Longrightarrow$ Equation d'Alembert vérifiée par $\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$. On en déduit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$

2. L'onde n'est pas plane, on reprend donc l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$, ce qui amène à

$$\overrightarrow{B} = E_0.\frac{\pi}{a.\omega}.cos\left(\frac{\pi z}{a}\right).sin(\omega t - kx).\overrightarrow{e_x} + \frac{k}{\omega}.E_0.sin\left(\frac{\pi z}{a}\right).cos(\omega t - kx).\overrightarrow{e_z}$$

3. On en déduit le vecteur de Poynting : $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{E} \wedge \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0}$ ce qui donne

$$\left\langle\overrightarrow{\Pi}\right\rangle = \frac{E_0^2}{2.\mu_0}\frac{k}{\omega}.sin^2\frac{\pi z}{a}.\overrightarrow{e_x}$$

Il y a donc un courant d'énergie dans le sens des Ox croissants associé à l'onde. Il s'agit d'une onde progressive.

4. $u_{em} = \frac{\epsilon_0.E^2}{2} + \frac{B^2}{2.\mu_0}$ On utilise les expressions des champs pour obtenir la valeur moyenne

$$\langle u_{em}\rangle = \frac{\epsilon_0.E_0^2}{4}.sin^2\frac{\pi z}{a} + \frac{E_0^2}{4.\mu_0}\left(\frac{\pi}{a.\omega}\right)^2.cos^2\frac{\pi z}{a} + \frac{E_0^2}{4.\mu_0}\left(\frac{k}{\omega}\right)^2.sin^2\frac{\pi z}{a}$$

Grâce à la relation de dispersion, on peut réduire l'expression à

$$\langle u_{em}\rangle = \frac{\epsilon_0.E_0^2}{4}\left[1 + \left(\frac{k.c}{\omega}\right)^2.\left(sin^2\frac{\pi z}{a} - cos^2\frac{\pi z}{a}\right)\right]$$

✓ On en déduit l'énergie localisée dans un parallélépipède tel que $0 < x < l$, $0 < y < a$ et $0 < z < a$:

$$\langle U_{em}\rangle = \int_0^a \langle u_{em}\rangle.l.a.dz = \frac{\epsilon_0.E_0^2}{4}.a.l.a$$

Le flux à travers la surface dans le plan $x = Cte$ est alors

$$\Phi = \int_0^a \left\langle\overrightarrow{\Pi}\right\rangle.Ldz\overrightarrow{u_x} = \frac{E_0^2}{2.\mu_0}\frac{k}{\omega}.a.\frac{a}{2}$$

Or la vitesse v_e de l'énergie est telle que l'énergie traversant cette surface S pendant une durée dt était localisée dans l'espace de section S et de longueur $l = v_e.dt$ initialement

$$\langle U_{em}\rangle.v_e.dt = \Phi.dt$$

On obtient alors

$$v_e = \frac{k}{\omega}.c^2$$

✓ $v_\varphi = \frac{\omega}{Re(\underline{k})} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}$ et de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi}$.

La vitesse de groupe correspond à la vitesse de propagation de l'énergie.

.