1. On applique les lois de Kirchhoff

✓ Loi des nœuds : $\underline{i}(x,t) = \underline{i}(x+dx,t) + dC.\dfrac{\partial \underline{u}(x+dx,t)}{\partial t}$

Soit $\underline{i}(x,t) \equiv \underline{i}(x,t) + \dfrac{\partial \underline{i}}{\partial x}.dx + \Gamma.dx.\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\underline{u}(x) + \dfrac{\partial \underline{u}}{\partial x}.dx\right]$

Avec un DL au premier ordre : $\dfrac{\partial \underline{i}}{\partial x} + \Gamma.\dfrac{\partial \underline{u}(x,t)}{\partial t} = 0$

✓ Loi de mailles : $\underline{u}(x,t) - dL.\dfrac{\partial \underline{i}(x,t)}{\partial t} - \underline{u}(x+dx,t) = 0$

Avec un DL au premier ordre : $\dfrac{\partial \underline{u}}{\partial x} + \Lambda.\dfrac{\partial \underline{i}(x,t)}{\partial t} = 0$

✓ Il faut découpler les équations. L'idée est de faire apparaître des dérivées équivalentes dans les deux équations. Pour cela on va dériver la première par rapport à t, la seconde par rapport à x :

$\dfrac{\partial^2 \underline{i}}{\partial x \partial t} + \Gamma.\dfrac{\partial^2 \underline{u}(x,t)}{\partial t^2} = 0$ et $\dfrac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} + \Lambda.\dfrac{\partial \underline{i}(x,t)}{\partial t \partial x} = 0$

Le théorème de Schwarz donne : $\dfrac{\partial^2 \underline{i}}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial^2 \underline{i}}{\partial t \partial x}$, donc :

$\dfrac{1}{\Lambda}.\dfrac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} + \Gamma.\dfrac{\partial^2 \underline{u}(x,t)}{\partial t^2} = 0$

On peut alors se ramener à l'équation de d'Alembert avec $c = \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$

2. On exploite l'une des deux équations de couplage liant $\underline{u}$ et $\underline{i}$: $\dfrac{\partial \underline{i}}{\partial x} + \Gamma.\dfrac{\partial \underline{u}(x,t)}{\partial t} = 0$

Soit $\boxed{\dfrac{\partial \underline{i}}{\partial x} = -\Gamma.j.\omega.U_0.e^{j(\omega t - k.x)}}$

Le phénomène étant ondulatoire, il n'y a pas de composante continue pour les vibrations, donc :

$\underline{i} = -\Gamma.j.\omega.U_0.\dfrac{1}{-j.k}.e^{j(\omega t - k.x)} = +\Gamma.\dfrac{\omega}{k}.U_0.e^{j(\omega t - k.x)}$

Or la relation de dispersion donne $\dfrac{\omega}{k} = c$, donc $\Gamma.\dfrac{\omega}{k} = \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}}$

Soit $\underline{i}(x,t) = \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}}.\underline{u}(x,t)$

On définit donc l'impédance caractéristique du câble $\boxed{\underline{Z}_c = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}}$