1. ✓ On considère le système cylindrique de rayon r et de longueur dz . En régime stationnaire, son énergie interne est constante, indépendante du temps : $U(t + dt) - U(t) = 0$

$$✓ \delta Q_e = \pi \cdot r^2 \cdot j(z) \cdot dt$$

$$✓ \delta Q_s = \pi \cdot r^2 \cdot j(z + dz) \cdot dt$$

$$✓ \text{L'énergie produite dans le milieu est } \delta Q_p = \mathcal{P}_v \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dz \cdot dt$$

✓ L'application du premier principe pour ce système fermé donne alors :

$$U(t + dt) - U(t) = \delta Q_e - \delta Q_s + \delta Q_p = \pi \cdot r^2 \cdot dt \cdot [j(z + dz) - j(z) + \mathcal{P}_v \cdot dz] \frac{dj}{dz} = \mathcal{P}_v$$

2. Par intégration : $j(z) = \mathcal{P}_v \cdot z + C_1$

On a de plus la loi de Fourier : $j(z) = -\lambda \cdot \frac{dT}{dz}$, ce qui donne :

$$\frac{dT}{dz} = \frac{-\mathcal{P}_v}{\lambda} \cdot z + B$$

$$T(z) = \frac{-\mathcal{P}_v}{2 \cdot \lambda} \cdot z^2 + B \cdot z + C, \text{ donc } A = \frac{-\mathcal{P}_v}{2 \cdot \lambda}$$

Les conditions aux limites donnent : $T(0) = T(L) = T_0 = C = A \cdot L^2 + B \cdot L + C$ soit $C = T_0$ et $B = -A \cdot L$

On en déduit que $A = \frac{-\mathcal{P}_v}{2 \cdot \lambda}$; $C = T_0$ et $B = \frac{\mathcal{P}_v \cdot L}{2 \cdot \lambda}$

3. On recherche donc la valeur de z telle que $\frac{T(z)}{dz} = 0$, soit $z_M = \frac{-B}{2 \cdot A} = \frac{L}{2}$

$$\text{On aura alors } T_M = A \cdot \frac{L^2}{4} + B \cdot \frac{L}{2} + C = 3240 \cdot 10^3 \text{ K}$$

Cette valeur semble bien sûr extrêmement élevée. En fait ce barreau va être en contact avec un fluide caloporteur non pas simplement au niveau de ses extrémités mais également au niveau de ses parois latérales, ce qui permettra de limiter les hausses de température.