

L'entropie S et la température T d'un trou noir sphérique de Hawking, placé dans le vide, sont reliés à la masse M et au rayon R par les équations d'état :

$$S = \frac{2.\pi^2.k_B.c^3.R^2}{h.G} \qquad T = \frac{h.c^3}{16.\pi^2.k_B.G.M}$$

1. On souhaite que la vitesse de libération à la surface soit égale à la vitesse de la lumière. En supposant que le modèle de la mécanique Newtonienne reste valable pour $v \simeq c$, en déduire une relation entre la masse M et le rayon R du trou noir. Quelle est alors l'expression de l'entropie en fonction de la masse ?
2. On considère l'évolution de la masse du trou noir par évaporation de la matière en surface. Au cours de cette évaporation, $\delta Q = T.dS$.
 - ✓ En utilisant la relation d'Einstein $E = m.c^2$, exprimer la variation d'énergie pour le trou noir en fonction de dM et c
 - ✓ Montrer que cette énergie est entièrement convertie en chaleur, donc en rayonnement
3. La puissance surfacique rayonnée par le trou noir est donnée par la formule de Stéfán $\mathcal{P}_s = \sigma.T^4$ avec $\sigma = \frac{8.\pi^5.k_B^4}{60.h^3.c^4}$
Déterminer le temps τ d'évaporation du trou noir en fonction de sa masse initiale M_0
4. Discuter de la stabilité d'un trou noir ayant la masse du soleil.