

## 1. Fonctions réelles ou complexes de variable réelle : limites et continuité.

- Définition 1.1 : limite, limite à droite, à gauche en un point d'une fonction réelle de variable réelle  
Théorème 1.1 : unicité d'une limite en un point  
Théorème 1.2 : liens entre limite, limite à droite, limite à gauche en un point  
Définition 1.2 : limite infinie en un point, limite en  $\pm\infty$ , limite infinie en  $\pm\infty$   
Théorème 1.3 : existence d'une limite et caractère borné de la fonction  
Théorème 1.4 : cas des fonctions complexes de variable réelle  
Théorème 1.5 : cas des fonctions monotones  
Théorème 1.6 : dit « des gendarmes »  
Définition 1.3 : fonction réelle de variable réelle continue, continue à droite, à gauche en un point  
Définition 1.4 : prolongement par continuité d'une fonction réelle de variable réelle en un point, prolongement à droite, à gauche en un point  
Théorème 1.7 : liens entre continuité, continuité à droite, continuité à gauche en un point  
Définition 1.5 : continuité d'une fonction réelle de variable réelle sur un intervalle, sur un ensemble  
Théorème 1.8 : cas des fonctions complexes de variable réelle  
Théorème 1.9 : somme, combinaison linéaire et produit de fonctions admettant une limite en un point, de fonctions continues  
Théorème 1.10 et définition 1.6 : l'algèbre  $C^0(I,K)$   
Théorème 1.11 : composée de fonctions admettant des limites, de fonctions continues  
Théorème 1.12 : image d'une suite par une fonction admettant une limite en un point  
Définition 1.7 : fonction k-lipschitzienne  
Définition 1.8 (hors programme) : fonction uniformément continue  
Théorème 1.13 (hors programme pour le premier point) : lien entre continuité et uniforme continuité  
Théorème 1.14 : des croissances comparées

## 2. Fonctions réelles de variable réelle : théorèmes généraux liés à la continuité.

- Théorème 2.1 : des valeurs intermédiaires  
Théorème 2.2 : image continue d'un intervalle  
Théorème 2.3 : image continue d'un segment  
Théorème 2.4 : monotonie et bijectivité ( $\Rightarrow$ )  
Théorème 2.5 : monotonie de bijectivité ( $\Leftarrow$ )  
Théorème 2.6 (hors programme) : de Heine

## 3. Dérivabilité des fonctions réelles ou complexes de variable réelle.

- Définition 3.1 : dérivabilité en un point d'une fonction réelle ou complexe de variable réelle  
Théorème 3.1 : caractérisation de la dérivabilité à l'aide d'un développement limité  
Théorème 3.2 : cas des fonctions à valeurs complexes  
Définition 3.2 : dérivabilité à droite et à gauche en un point  
Théorème 3.3 : lien entre dérivabilité à droite, à gauche et dérivabilité en un point  
Définition 3.3 : dérivabilité sur un intervalle d'une fonction réelle ou complexe de variable réelle  
Théorème 3.4 : dérivabilité d'une combinaison linéaire  
Théorème 3.5 : dérivabilité d'un produit ou d'un quotient  
Théorème 3.6 :  $D^1(I,K)$   
Théorème 3.7 : dérivabilité d'une composée  
Théorème 3.8 : dérivabilité d'une réciproque  
Théorème 3.9 : de Rolle  
Théorème 3.10 : des accroissements finis  
Théorème 3.11 : dérivabilité par passage à la limite de la dérivée  
Théorème 3.12 : lien entre monotonie d'une fonction à valeurs réelles et signe de sa dérivée  
Définition 3.4 : fonction de classe  $C^1$ ,  $C^k$ ,  $C^\infty$  de variable réelle à valeurs réelles ou complexes  
Théorème 3.13 : combinaison linéaire et produit de fonctions de classe  $C^n$  et formule de Leibniz  
Théorème 3.14 : formule de Taylor-Lagrange

#### **4. Fonctions réelles de variable réelle : fonctions équivalentes, fonctions négligeables.**

Définition 4.1 et théorème 4.1 : fonctions équivalentes entre elles en un point

Définition 4.2 et théorème 4.2 : fonction négligeable devant une autre en un point

#### **5. Développements limités.**

Définition 5.1 : développement limité d'une fonction en 0

Définition 5.2 : développement limité d'une fonction en un point  $a$

Définition 5.3 : développement limité ou asymptotique d'une fonction en  $+\infty$

Théorème 5.1 : unicité d'un développement limité d'ordre  $n$

Théorème 5.2 : forme des développements limités dans le cas des fonctions paires et impaires

#### **6. Obtention de développements limités, opérations sur les développements limités.**

Théorème 6.1 : utilisation de la formule de Taylor, formule de Taylor-Young

Théorème 6.2 : somme, produit par un scalaire, et produit de fonctions admettant des  $DL_n(0)$

Théorème 6.3 : composition de fonctions admettant des  $DL_n(0)$

Théorème 6.4 : primitivation d'un  $DL_n(0)$

Théorème 6.5 : dérivation d'un  $DL_n(0)$

#### **7. Développements limités de fonctions classiques.**

Théorème 7.1 : développements limités classiques

Théorème 7.2 : fonctions tangente, tangente hyperbolique

Exemple détaillé.

#### **8. Suites de réels ou de complexes.**

Définition 8.1 : suite de réels ou de complexes

Définition 8.2 : suite convergente, divergente

Définition 8.3 : suite bornée

Théorème 8.1 : une suite convergente est bornée

Théorème 8.2 : combinaison linéaire, produit et quotient de suites convergentes

Théorème 8.3 : condition nécessaire de convergence

#### **9. Suites de réels.**

Définition 9.1 : suite de réels croissante, décroissante, monotone

Définition 9.2 : suite de réels majorée, minorée

Théorème 9.1 : équivalence entre suite bornée et suite majorée et minorée

Définition 9.3 : suite réelle divergeant vers  $+\infty$

Théorème 9.2 : convergence des suites réelles monotones bornées

Définition 9.4 : suites adjacentes

Théorème 9.3 : convergence des suites adjacentes

Théorème 9.4 : dit « des gendarmes »

Théorème 9.5 : signe de suites équivalentes en  $+\infty$

#### **10. Suites de complexes.**

Théorème 10.1 : équivalence de convergence entre la convergence d'une suite et celle de ses parties réelle et imaginaire

Théorème 10.2 : cas d'une suite convergeant vers 0

Théorème 10.3 : utilisation des suites module et argument d'une suite complexe

#### **11. Suites de réels ou de complexes : suites extraites.**

Définition 11.1 : suite extraite

Théorème 11.1 : convergence des suites extraites d'une suite convergente

Théorème 11.2 : cas des suites des termes d'ordres pair et impair

Théorème 11.3 : Bolzano-Weierstrass

## **12. Suites récurrentes réelles de type : $u_{n+1} = f(u_n)$ .**

Définition 12.1 : suite récurrente et fonction itératrice

Théorème 12.1 : limites possibles d'une suite récurrente si la fonction itératrice est continue

Théorème 12.2 : lien entre monotonie de la suite et croissante de la fonction itératrice

Théorème 12.3 : cas où la fonction itératrice est décroissante

## 1. Fonctions réelles ou complexes de variable réelle : limites et continuité.

### Définition 1.1 : limite, limite à droite, à gauche en un point d'une fonction réelle de variable réelle

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a$  un réel élément de  $I$  ou adhérent à  $I$  (au « bord » de  $I$ ).

On dit que  $f$  admet une limite en  $a$  si et seulement si :

$$\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

On dit que  $f$  admet une limite à droite en  $a$  si et seulement si :

- $I \cap ]a, +\infty) \neq \emptyset$  ( $f$  est définie sur un voisinage à droite de  $a$ )
- $\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (0 \leq x - a \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon).$

On dit que  $f$  admet une limite à gauche en  $a$  si et seulement si :

- $I \cap (-\infty, a[ \neq \emptyset$  ( $f$  est définie sur un voisinage à gauche de  $a$ )
- $\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (-\alpha \leq x - a \leq 0) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon).$

### Théorème 1.1 : unicité d'une limite en un point

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a$  un réel élément de  $I$  ou adhérent à  $I$ .

Si  $f$  admet pour limite  $L$  en  $a$  (limite à droite ou limite à gauche en  $a$ ), cette limite est unique et est notée

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  (ou  $\lim_a f$ ) ( $\lim_{x \rightarrow a}^> f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a}^< f(x)$  pour les limites à droite et à gauche en  $a$ ).

Démonstration :

Supposons que  $f$  admette deux limites différentes en  $a$ , notées  $L$  et  $L'$ , avec :  $L \neq L'$ .

Soit :  $\varepsilon = \frac{|L - L'|}{3} > 0$ . Alors :

- $\exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon)$ , et :
- $\exists \alpha' > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha') \Rightarrow (|f(x) - L'| \leq \varepsilon)$ .

Or comme  $a$  est adhérent à  $I$  (et par définition), pour :  $\alpha_0 = \min(\alpha, \alpha') > 0, \exists x_0 \in I, |x_0 - a| \leq \alpha_0$ .

On peut alors écrire :  $|L - L'| = |L - f(x_0) + f(x_0) - L'| \leq |f(x_0) - L| + |f(x_0) - L'| \leq 2\varepsilon$ , ce qui conduit à :

$$3\varepsilon \leq 2\varepsilon, \text{ soit : } \varepsilon \leq 0 : \text{ impossible.}$$

Conclusion : la limite de  $f$  en  $a$ , si elle existe, est unique.

### Théorème 1.2 : liens entre limite, limite à droite, limite à gauche en un point

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a$  un réel élément de  $I$ .

Lorsque limite de  $f$  en  $a$ , limite à droite et limite à gauche de  $f$  en  $a$  ont un sens,  $f$  admet pour limite  $L$  en  $a$  si et seulement si  $f$  admet pour limite  $L$  à droite et à gauche en  $a$ .

Démonstration :

•  $[ \Rightarrow ]$

Si  $f$  admet pour limite  $L$  en  $a$ , alors :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon)$ .

Donc :  $\forall x \in I, (0 \leq x - a \leq \alpha) \Rightarrow (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon)$ , et  $f$  admet pour limite  $L$  à droite en  $a$ .

De même,  $f$  admet pour limite  $L$  à gauche en  $a$  (pour un  $\varepsilon$  donné, le même  $\alpha$  convient pour la limite à droite et la limite à gauche).

•  $[ \Leftarrow ]$

Si  $f$  admet pour limite  $L$  à droite et à gauche en  $a$ , alors pour un réel  $\varepsilon$  strictement positif, on a :

- $\exists \alpha > 0, \forall x \in I, (0 \leq x - a \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon)$ , et :
- $\exists \alpha' > 0, \forall x \in I, (-\alpha' \leq x - a \leq 0) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon)$ .

Donc pour :  $\alpha_0 = \min(\alpha, \alpha')$ , on obtient :  $\forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha_0) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon)$ , puisque  $(x - a)$  sera soit positif, soit négatif, et l'implication sera alors vérifiée dans les deux cas.

Donc  $f$  admet bien pour limite  $L$  en  $a$ .

### Définition 1.2 : limite infinie en un point, limite en $\pm\infty$ , limite infinie en $\pm\infty$

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a$  un réel élément de  $I$  ou adhérent à  $I$ .

On dit que  $f$  admet pour limite  $+\infty$  (ou tend vers  $+\infty$ ) en  $a$  (respectivement  $-\infty$  en  $a$ ) si et seulement si :

- $\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (f(x) \geq A)$ , pour une limite égale à  $+\infty$ , et :
- $\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (f(x) \leq -A)$ , pour une limite égale à  $-\infty$ .

Si  $f$  est une fonction définie d'un intervalle  $I$  de type  $[a, +\infty)$  ou  $]a, +\infty)$  dans  $\mathbb{R}$ , on dit que  $f$  admet pour limite  $L$  en  $+\infty$  si et seulement si :

- $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \geq A, |f(x) - L| \leq \varepsilon$ .

La définition s'adapte lorsque l'on parle d'une limite finie en  $-\infty$ .

Enfin, si  $f$  est une fonction définie d'un intervalle  $I$  de type  $[a, +\infty)$  ou  $]a, +\infty)$  dans  $\mathbb{R}$ , on dit que  $f$  admet pour limite  $+\infty$  (ou tend vers  $+\infty$ ) en  $+\infty$  si et seulement si :

- $\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists B \in \mathbb{R}^+, \forall x \geq B, f(x) \geq A$ .

Là encore, la définition s'adapte pour parler d'une limite  $\pm\infty$  en  $\pm\infty$ .

### **Théorème 1.3 : existence d'une limite et caractère borné de la fonction**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a$  un réel élément de  $I$  ou adhérent à  $I$ .

Si  $f$  admet une limite finie  $L$  en  $a$ ,  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

*Démonstration :*

Cas où  $a$  est réel :

Soit :  $\varepsilon > 0$ .

Alors :  $\exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon) \Rightarrow ([L - \varepsilon] \leq f(x) \leq [L + \varepsilon])$ .

Sur le voisinage de  $a$  défini par :  $I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$ ,  $|f|$  est donc majorée par  $\max(|L - \varepsilon|, |L + \varepsilon|)$ , et  $f$  est bien bornée au voisinage de  $a$ .

Cas où :  $a = +\infty$ .

Soit :  $\varepsilon > 0$ .

Alors :  $\forall A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq A) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon) \Rightarrow ([L - \varepsilon] \leq f(x) \leq [L + \varepsilon])$ .

Là encore, sur le voisinage de  $+\infty$  défini par :  $I \cap [A, +\infty)$ ,  $|f|$  est majorée par  $\max(|L - \varepsilon|, |L + \varepsilon|)$ , et  $f$  est bien bornée au voisinage de  $a$ .

### **Théorème 1.4 : cas des fonctions complexes de variable réelle**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ , et soit  $a$  un réel élément de  $I$ .

On note :  $f = \text{Re}(f) + i.\text{Im}(f)$ , où  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Alors  $f$  admet une limite en  $a$  si et seulement si  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  en admettent une en  $a$ , et on a alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [\text{Re}(f)(x)] + i \cdot \lim_{x \rightarrow a} [\text{Im}(f)(x)].$$

De plus si  $\bar{f}$  désigne :  $\bar{f} = \text{Re}(f) - i.\text{Im}(f)$ ,  $f$  admet une limite en  $a$  si et seulement si  $\bar{f}$  en admet une.

*Démonstration :*

• [ $\Rightarrow$ ]

Si  $f$  admet une limite :  $L = L_x + i.L_y$ , en  $a$ , alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

Or :  $\forall z \in \mathbb{C}, z = (u + i.v)$ , avec :  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , on a :  $|u| \leq |z|$ , et :  $|v| \leq |z|$ , donc :

$$\forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|\text{Re}(f)(x) - L_x| \leq |f(x) - L| \leq \varepsilon, \text{ et } : |\text{Im}(f)(x) - L_y| \leq |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

Donc  $\text{Re}(f)$  tend vers  $L_x$  en  $a$  et  $\text{Im}(f)$  vers  $L_y$ .

• [ $\Leftarrow$ ]

Si maintenant  $\text{Re}(f)$  tend vers  $\alpha$  en  $a$ , et  $\text{Im}(f)$  vers  $\beta$ , alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1 > 0, \exists \eta_2 > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta_1) \Rightarrow (|\text{Re}(f)(x) - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ et } : |\text{Im}(f)(x) - \beta| \leq \frac{\varepsilon}{2}).$$

Donc, puisque :  $\forall z \in \mathbb{C}, z = (u + i.v)$ , avec :  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , on a :  $|z| \leq |u| + |v|$ , on en déduit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - (\alpha + i.\beta)| \leq \varepsilon),$$

et  $f$  admet une limite en  $a$  qui est bien  $[\alpha + i.\beta]$ .

• Enfin,  $f$  admet une limite en  $a$  si et seulement si  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  admettent des limites en  $a$ , donc si et seulement si  $\text{Re}(f)$  et  $-\text{Im}(f)$  admettent des limites en  $a$  et enfin si et seulement si  $\bar{f}$  en admet une.

### **Théorème 1.5 : cas des fonctions monotones**

Soit :  $I = ]\alpha, \beta[$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est croissante sur  $I$ , alors :

- si  $f$  est majorée sur  $I$ ,  $f$  admet une limite en  $\beta$  qui est la borne supérieure de  $f$  sur  $I$ ,

- si  $f$  n'est pas majorée sur  $I$ ,  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $\beta$ .

Si  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors :

- si  $f$  est minorée sur  $I$ ,  $f$  admet une limite en  $\beta$  qui est la borne inférieure de  $f$  sur  $I$ ,
- si  $f$  n'est pas minorée sur  $I$ ,  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $\beta$ .

Les résultats s'adaptent pour l'étude de  $f$  en  $\alpha$ .

*Démonstration :*

Cas où  $f$  est croissante sur  $I$ .

- Supposons  $f$  majorée sur  $I$  et posons :  $L = \sup_{x \in I} f(x)$ .

Alors :  $\forall x \in I, f(x) \leq L$ .

De plus :  $\forall \varepsilon > 0, (L - \varepsilon)$  n'est pas un majorant de  $f$  sur  $I$  (puisque  $L$  est le plus petit des majorant sur  $I$ ), donc :  $\exists y \in I, f(y) > L - \varepsilon$ .

Mais puisque  $f$  est croissante sur  $I$ , on en déduit :

- si  $\beta$  est réel, alors :  $\exists \alpha > 0, y = \beta - \alpha$ , et :  $\forall x \in I, (x \geq y) \Rightarrow (f(x) \geq f(y) > L - \varepsilon)$ .

Autrement dit, dans ce cas :  $\forall x \in I, (-\alpha \leq x - \beta \leq 0) \Rightarrow (-\varepsilon \leq f(x) - L \leq 0) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon)$ , ce qui traduit le fait que  $f$  admet pour limite  $L$  à droite en  $\beta$ .

- si :  $\beta = +\infty$ , alors :  $\forall x \in I, (x \geq y) \Rightarrow (f(x) \geq f(y) \geq L - \varepsilon)$ , soit :

$$\forall x \in I, (x \geq y) \Rightarrow (-\varepsilon \leq f(x) - L \leq 0) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon),$$

et on obtient cette fois que  $f$  tend vers  $L$  en  $+\infty$  donc en  $\beta$ .

- Supposons maintenant  $f$  non majorée sur  $I$ .

Alors :  $\forall A \in \mathbb{R}, A$  n'est pas un majorant de  $f$  sur  $I$  et :  $\exists y \in I, f(y) > A$ .

A nouveau, on distingue deux cas :

- si  $\beta$  est réel, alors :  $\exists \alpha > 0, y = \beta - \alpha$ , et :  $\forall x \in I, (x \geq y) \Rightarrow (f(x) \geq f(y) \geq A)$ ,

ce qui se lit aussi en disant que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $\beta$ .

- si :  $\beta = +\infty$ , alors :  $\forall x \in I, (x \geq y) \Rightarrow (f(x) \geq f(y) \geq A)$ , et là) encore,  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  donc en  $\beta$ .

Cas où  $f$  est décroissante sur  $I$ .

Il suffit de poser :  $g = -f$ , qui est alors une fonction croissante sur  $I$ , et les résultats obtenus au-dessus conduisent immédiatement à ceux attendus dans cette deuxième partie, en remarquant que :

$$(f \text{ minorée sur } I) \Leftrightarrow (g \text{ majorée sur } I).$$

### **Théorème 1.6 : dit « des gendarmes »**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f, g$  et  $h$  trois fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a$  un élément de  $I$  ou adhérent à  $I$  (éventuellement  $\pm\infty$ ).

On suppose que :  $\forall x \in I, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ .

Si  $g$  et  $h$  admettent la même limite  $L$  (finie ou infinie) en  $a$ , alors  $f$  admet une limite en  $a$  égale à la limite commune de  $g$  et de  $h$  en  $a$ .

*Démonstration :*

Cas où  $a$  est réel et  $L$  est un réel.

Soit :  $\varepsilon > 0$ .

Alors :

- $\exists \alpha_g > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha_g) \Rightarrow (|g(x) - L| \leq \varepsilon)$ , et :
- $\exists \alpha_h > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha_h) \Rightarrow (|h(x) - L| \leq \varepsilon)$ .

En posant alors :  $\alpha = \min(\alpha_g, \alpha_h) > 0$ , on obtient :

$$\forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|g(x) - L| \leq \varepsilon, \text{ et } |h(x) - L| \leq \varepsilon).$$

Si on remarque alors que :  $\forall x \in I, |f(x) - L| \leq \max(|g(x) - L|, |h(x) - L|)$ , on conclut à :

$$\forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon), \text{ et } f \text{ admet bien pour limite } L \text{ en } a.$$

Les huit autres cas ( $a$  réel ou égal à  $\pm\infty$ ,  $L$  réel ou égal à  $\pm\infty$ ) se traitent de façon similaire.

### **Définition 1.3 : fonction réelle de variable réelle continue, continue à droite, à gauche en un point**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a$  un réel élément de  $I$ .

On dit que  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $f$  admet  $f(a)$  pour limite en  $a$ .

On dit que  $f$  est continue à droite en  $a$  si et seulement si  $f$  admet  $f(a)$  pour limite à droite en  $a$ .

On dit que  $f$  est continue à gauche en  $a$  si et seulement si  $f$  admet  $f(a)$  pour limite à gauche en  $a$ .

### **Définition 1.4 : prolongement par continuité d'une fonction réelle de variable réelle en un point, prolongement à droite, à gauche en un point**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .  
 Soit  $a$  un réel adhérent à  $I$ , non élément de  $I$  (au « bord » d'un intervalle ouvert).  
 On dit que  $f$  est prolongeable par continuité à droite en  $a$  (ou admet un prolongement par continuité en  $a$ ) si et seulement si  $f$  admet une limite finie  $L$  en  $a$ .  
 La fonction  $f_0$  définie par :

- $\forall x \in I, f_0(x) = f(x)$ ,
- $f_0(a) = L$ ,

est appelée prolongement par continuité de  $f$  en  $a$ , et  $f_0$  est alors continue sur  $[I \cup \{a\}]$ .  
 On définit de façon similaire, lorsque cela a un sens, les prolongements par continuité à droite et à gauche de  $f$  en  $a$ .

**Théorème 1.7 : liens entre continuité, continuité à droite, continuité à gauche en un point**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .  
 Soit  $a$  un réel élément de  $I$ .  
 Lorsque limite de  $f$  en  $a$ , limite à droite et limite à gauche de  $f$  en  $a$  ont un sens,  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $f$  est continue à droite et à gauche en  $a$ .

*Démonstration :*

C'est une conséquence immédiate du théorème démontré au-dessus sur les liens entre limite d'une fonction en un point, limite à droite et limite à gauche, en remarquant que :

- $(f \text{ continue en } a) \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a))$ ,
- $(f \text{ continue à droite en } a) \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a))$ ,
- $(f \text{ continue à gauche en } a) \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a))$ .

**Définition 1.5 : continuité d'une fonction réelle de variable réelle sur un intervalle, sur un ensemble**

Soit  $I$  un intervalle (ou un plus généralement un sous-ensemble) de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .  
 On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si et seulement si  $f$  est continue en tout point de  $I$ .  
 On dit alors que  $f$  est de classe  $C^0$  sur  $I$ .

**Théorème 1.8 : cas des fonctions complexes de variable réelle**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ , et soit  $a$  un réel élément de  $I$ .  
 Alors  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont continues en  $a$ .  
 De même,  $f$  est continue sur  $I$  si et seulement si  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont continues sur  $I$ .

*Démonstration :*

Puisque l'existence d'une limite en un point pour une fonction à valeurs complexes est équivalente à l'existence d'une limite en ce point pour ses parties réelle et imaginaire, la première équivalence en découle.  
 Pour la deuxième, il suffit de remplacer « sur  $I$  » par « en tout point de  $I$  » et d'appliquer le premier point.

**Théorème 1.9 : somme, combinaison linéaire et produit de fonctions admettant une limite en un point, de fonctions continues**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .  
 Soit  $a$  un réel élément de  $I$  ou adhérent à  $I$ .  
 Si  $f$  et  $g$  admettent des limites en  $a$ , alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(\lambda.f + \mu.g)$  admet une limite en  $a$ , ainsi que  $(f.g)$  et on a :

- $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda.f + \mu.g)(x) = \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \mu \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ,
- $\lim_{x \rightarrow a} (f.g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

De plus, si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ , alors  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$ ,  $\frac{f}{g}$  est définie sur ce voisinage

et cette fonction admet une limite en  $a$  telle que :  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ .

**Démonstration :**

La démonstration sera faite dans le cas où  $a$  est un réel (les cas :  $a = \pm\infty$ , s'adaptent de ce qui suit).

Notons dans toute la suite :  $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , et :  $L' = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

- somme ( $f + g$ ).

Pour :  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \alpha_f > 0$ ,  $\exists \alpha_g > 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $(|x - a| \leq \alpha_f) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \frac{\varepsilon}{2})$ , et :  $(|x - a| \leq \alpha_g) \Rightarrow (|g(x) - L'| \leq \frac{\varepsilon}{2})$ .

Donc, en posant :  $\alpha = \min(\alpha_f, \alpha_g) > 0$ , on a :

$\forall x \in I$ ,  $(|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|(f+g)(x) - (L+L')| \leq |f(x) - L| + |g(x) - L'| \leq \varepsilon)$ ,  
et on montre ainsi que  $(f+g)$  tend vers  $(L+L')$  en  $a$ .

- produit ( $\lambda.f$ ).

Si  $\lambda$  est nul, le résultat est immédiat puisque la fonction nulle est continue sur  $I$ , et si  $\lambda$  est non nul :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}) \Rightarrow (|(\lambda.f)(x) - (\lambda.L)| \leq |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon),$$

ce qui montre là encore que  $(\lambda.f)$  tend vers  $(\lambda.L)$  en  $a$ .

- produit ( $f.g$ ).

On peut commencer par remarquer que :

$$\forall x \in I, |(f.g)(x) - L.L'| = |(f(x) - L).g(x) + L.(g(x) - L')| \leq |f(x) - L|. |g(x)| + |L|. |g(x) - L'|.$$

Puis, comme  $g$  admet une limite en  $a$ , elle est bornée au voisinage de  $a$  par une constante :  $M > 0$ , soit :

$$\bullet \exists \alpha_1 > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha_1) \Rightarrow (|g(x)| \leq M).$$

Soit maintenant :  $\varepsilon > 0$ .

Alors :

$$\bullet \exists \alpha_2 > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha_2) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \frac{\varepsilon}{2.M}),$$

$$\bullet \exists \alpha_3 > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha_3) \Rightarrow (|g(x) - L'| \leq \frac{\varepsilon}{2.(|L| + 1)}),$$

et, en posant :  $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , on a :  $\forall x \in I$ ,  $(|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|(f.g)(x) - (L.L')| \leq \varepsilon)$ .

On vient bien de démontrer que  $(f.g)$  tend vers  $L.L'$  en  $a$ .

- quotient  $\frac{f}{g}$ .

Tout d'abord, si :  $L' \neq 0$ , alors pour :  $\varepsilon = \frac{|L'|}{2} > 0$ , on a :

$$\exists \alpha_1 > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha_1) \Rightarrow (|g(x) - L'| \leq \varepsilon) \Rightarrow (|g(x)| \geq |L'| - \varepsilon = \varepsilon > 0),$$

ce qui garantit que  $g$  est non nulle sur :  $J = I \cap [a - \alpha_1, a + \alpha_1]$ , et qu'elle vérifie :  $\forall x \in J, \frac{1}{|g(x)|} \leq \frac{2}{|L'|}$ .

Ensuite :  $\forall x \in J, \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{L'} \right| = \frac{1}{|g(x).L'|} \cdot |f(x).L' - g(x).L| = \frac{1}{|g(x).L'|} \cdot |L'.(f(x) - L) + L.(L' - g(x))|$ , et :

$$\forall x \in J, \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{L'} \right| \leq \frac{1}{|g(x)|} \cdot |f(x) - L| + \frac{|L|}{|g(x).L'|} \cdot |g(x) - L'| \leq \frac{2}{|L'|} \cdot |f(x) - L| + \frac{2 \cdot |L|}{|L'|^2} \cdot |g(x) - L'|.$$

Enfin, soit :  $\varepsilon > 0$ .

$$\bullet \exists \alpha_2 > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha_2) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \frac{\varepsilon \cdot |L'|}{4}),$$

$$\bullet \exists \alpha_3 > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha_3) \Rightarrow (|g(x) - L'| \leq \frac{\varepsilon \cdot |L'|^2}{4 \cdot |L|}).$$

Et en posant alors :  $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) > 0$ , on constate que :  $\forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow \left( \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{L'} \right| \leq \varepsilon \right)$ ,

ce qui montre que  $\frac{f}{g}$  tend vers  $\frac{L}{L'}$  en  $a$ .

**Théorème 1.10 et définition 1.6 : l'algèbre  $C^0(I, \mathbf{K})$** 

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbf{K}$  forme une algèbre pour les lois  $+$ ,  $\cdot$ ,  $\times$  de  $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ .

De plus, pour deux fonctions  $f$  et  $g$  continues de  $I$  dans  $\mathbf{K}$ , telles que  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , la fonction

$\frac{f}{g}$  est définie et continue sur  $I$ .

*Démonstration :*

L'ensemble  $C^0(I, \mathbf{K})$  est évidemment inclus dans  $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ , et non vide puisque la fonction nulle de  $I$  dans  $\mathbf{K}$  est continue sur  $I$ , et stable par combinaison linéaire en utilisant le théorème précédent.

Comme de plus la loi  $\times$  est interne dans  $C^0(I, \mathbf{K})$ , toujours d'après le théorème précédent, les propriétés des lois de  $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$  montrent que  $C^0(I, \mathbf{K})$  est bien une algèbre pour ces lois (et même une sous-algèbre de  $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ ).

Le théorème précédent montre enfin également que si  $f$  et  $g$  sont continues en tout point de  $I$  et si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $\frac{f}{g}$  est définie et continue en tout point de  $I$  donc sur  $I$ .

**Théorème 1.11 : composée de fonctions admettant des limites, de fonctions continues**

Soient  $I$  et  $J$  des intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $g$  une fonction de  $J$  dans  $\mathbf{K}$ .

Si  $f$  est continue sur  $I$ , à valeurs dans  $J$  et si  $g$  est continue sur  $J$ , alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

*Démonstration :*

Soit :  $a \in I$ ,  $b = f(a) \in J$ , et :  $c = g(b)$ .

Soit :  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $g$  étant continue en  $b$  :  $\exists \alpha > 0, \forall y \in J, (|y - b| \leq \alpha) \Rightarrow (|g(y) - c| \leq \varepsilon)$ .

Pour cet  $\alpha$ ,  $f$  étant continue en  $a$ , on a :  $\exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - b| \leq \alpha)$ .

Et donc :  $\forall x \in I, (|x - a| \leq \eta) \Rightarrow (y = f(x) \in J, \text{ et } |y - b| \leq \alpha) \Rightarrow (|g(y) - c| = |g(f(x)) - c| \leq \varepsilon)$ .

Autrement dit,  $g \circ f$  admet pour limite :  $g(b) = g(f(a))$ , en  $a$ .

Donc  $g \circ f$  est continue en tout point de  $I$ , donc continue sur  $I$ .

**Théorème 1.12 : image d'une suite par une fonction admettant une limite en un point**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a$  un élément de  $I$  ou adhérent à  $I$  (éventuellement  $\pm\infty$ ).

Si  $f$  admet une limite (éventuellement infinie) en  $a$ , alors pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $I$  qui tend vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))$  tend vers la limite de  $f$  en  $a$ .

Si d'autre part,  $a$  est élément de  $I$ , alors  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(a)$ .

*Démonstration :*

• Dans le cas où  $a$  est un réel (les autres cas :  $a = \pm\infty$ , là encore, s'adaptent).

Soit :  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $f$  admet comme limite  $L$  en  $a$ , on a :  $\exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - L| \leq \varepsilon)$ .

Soit maintenant  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $I$  qui converge vers  $a$ .

Alors, puisque :  $\alpha > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n - a| \leq \alpha$ , et pour ces valeurs de  $n$  :  $|f(x_n) - L| \leq \varepsilon$ .

Autrement dit :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f(x_n) - L| \leq \varepsilon$ , et  $(f(x_n))$  converge vers  $L$ .

• Si maintenant  $a$  est élément de  $I$ ,

[ $\Rightarrow$ ] si  $f$  est continue en  $a$ , alors  $f$  admet pour limite  $f(a)$  en  $a$ , et le résultat précédent s'applique.

[ $\Leftarrow$ ] supposons  $f$  non continue en  $a$ .

Alors :  $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in I, |x - a| \leq \alpha$ , et :  $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ .

Soit donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in I, |x_n - a| \leq 2^{-n}$ , et :  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ .

Il est alors clair que la suite  $(x_n)$  est une suite d'éléments de  $I$  qui converge vers  $a$ , et  $(f(x_n))$  ne converge pas vers  $a$ . Par contraposée, on a démontré l'implication réciproque.

**Définition 1.7 : fonction k-lipschitzienne**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est k-lipschitzienne, avec :  $k \in \mathbb{R}$ , si et seulement si :

$$\forall (x, x') \in I^2, |f(x) - f(x')| \leq k \cdot |x - x'|.$$

**Définition 1.8 (hors programme) : fonction uniformément continue**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est uniformément continue sur  $I$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, x') \in I^2, (|x - x'| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon).$$

### **Théorème 1.13 (hors programme pour le premier point) : lien entre continuité et uniforme continuité**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est uniformément continue sur  $I$ , elle est continue sur  $I$ .

Si  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $I$ , elle est uniformément continue, donc continue sur  $I$ .

*Démonstration :*

• Supposons  $f$  uniformément continue sur  $I$ .

Soit :  $a \in I$ .

Alors :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, x') \in I^2, (|x - x'| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon)$ .

En particulier :  $\forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$ , et  $f$  est continue en  $a$ , donc sur  $I$ .

• Supposons  $f$   $k$ -lipschitzienne (avec :  $k > 0$ , en le remplaçant au besoin par une valeur plus grande).

Alors :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{k}, \forall (x, x') \in I^2, (|x - x'| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(x')| \leq k \cdot |x - x'| \leq k \cdot \alpha = \varepsilon)$ .

$f$  est donc uniformément continue sur  $I$ , donc continue sur  $I$ .

## **2. Fonctions réelles de variable réelle : théorèmes généraux liés à la continuité.**

### **Théorème 2.1 : des valeurs intermédiaires**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  prend des valeurs positives et négatives sur  $I$ ,  $f$  s'annule en au moins un point de  $I$ .

Plus généralement, pour  $a$  et  $b$  éléments de  $I$ ,  $f$  prend sur  $I$  toutes les valeurs entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

*Démonstration :*

• Supposons qu'il existe  $a$  et  $b$  dans  $I$ , tels que :  $a < b$ , et :  $f(a) \neq f(b)$ , par exemple :  $f(a) < f(b)$ .

Posons :  $a_0 = a, b_0 = b$ , et :  $c_0 = \frac{a+b}{2}$ .

Alors :  $f(a) < 0, f(b) > 0$ , et :

• si :  $f(c_0) = 0$ , alors  $c_0$  est solution du problème :  $f(x) = 0$ ,

• si :  $f(c_0) > 0$ , on pose :  $a_1 = a_0, b_1 = c_0$ ,

• si :  $f(c_0) < 0$ , on pose :  $a_1 = c_0, b_1 = b_0$ .

On constate alors que :  $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$ , et :  $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ ,  $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$ .

Supposons maintenant, pour un entier  $n$  donné, qu'on ait construit  $(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n)$  telle que :

•  $\forall 0 \leq k \leq n, f(a_k) < 0, f(b_k) > 0$ ,

•  $a_0 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_0$ ,

•  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ ,

On pose alors :  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ , et trois possibilités à nouveau se présentent :

• si :  $f(c_n) = 0$ , alors on a trouvé une solution à l'équation :  $f(x) = 0$ ,

• si :  $f(c_n) > 0$ , on pose :  $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n$ ,

• si :  $f(c_n) < 0$ , on pose :  $a_{n+1} = c_n, b_{n+1} = b_n$ ,

et donc, soit on a trouvé une solution à l'équation :  $f(x) = 0$ , soit on a construit des termes  $a_{n+1}, b_{n+1}$  qui complètent les suites précédentes et vérifient toujours :

$$f(a_{n+1}) < 0, f(b_{n+1}) > 0, a_0 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_0, b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

On constate donc qu'ainsi, soit on trouve une solution à l'équation :  $f(x) = 0$ , soit on construit deux suites adjacentes  $(a_n)$  et  $(b_n)$  (toutes les hypothèses sont vérifiées), qui convergent donc :  $\alpha \in [a, b]$ .

Puisque de plus  $\alpha$  est élément de  $I$ ,  $f$  étant continue en  $I$ , les suites  $(f(a_n))$  et  $(f(b_n))$  convergent toutes deux vers  $f(\alpha)$ .

Enfin :  $(\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) < 0) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(\alpha) \leq 0)$ , et :  $(\forall n \in \mathbb{N}, f(b_n) > 0) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(\alpha) \geq 0)$ .

On constate finalement que :  $f(\alpha) = 0$ .

Maintenant, si  $f$  est quelconque, pour :  $a < b$ , dans  $I$  :

- si :  $f(a) = f(b)$ , il n'y a pas de problème, et :
- si :  $f(a) < f(b)$  (par exemple), alors :  $\forall \lambda \in ]f(a), f(b)[$ , la fonction  $\varphi$  définie par :  $\forall x \in I, \varphi(x) = f(x) - \lambda$ , permet de montrer (puisqu'elle vérifie les hypothèses précédentes) que :  $\exists c \in ]a, b[ \subset I, f(c) = \lambda$ .  
Autrement dit,  $f$  prend toutes les valeurs sur  $I$  (et même sur  $[a, b]$ ) entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

### **Théorème 2.2 : image continue d'un intervalle**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .  
Alors  $f(I)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration :*

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.

En effet, si on note :  $J = f(I)$ , et si  $J$  contient deux valeurs  $\alpha$  et  $\beta$ , le théorème des valeurs intermédiaires montre que  $f$  prend sur  $I$  toutes les valeurs entre  $\alpha$  et  $\beta$ .

### **Théorème 2.3 : image continue d'un segment**

Soit :  $I = [a, b]$ , un segment de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .  
Alors  $f(I)$  est un segment de  $\mathbb{R}$ .  
En particulier,  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  et atteint ses bornes sur  $[a, b]$ .

*Démonstration :*

- Montrons tout d'abord que  $f$  est bornée sur  $[a, b]$ .

Supposons pour cela  $f$  non majorée, et donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b], f(x_n) > n$ .

Alors la suite  $(x_n)$  est une suite d'éléments de  $[a, b]$ .

Or  $[a, b]$  est un ensemble fermé et borné, donc compact, et donc on peut extraire de  $(x_n)$  une suite  $(x_{\varphi(n)})$  convergente vers un élément  $\alpha$  de  $[a, b]$ .

Mais puisque  $f$  est continue en  $\alpha$ , la suite  $(f(x_n))$  tend vers  $f(\alpha)$ .

C'est donc contradictoire avec le fait que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) > n$ .

Donc  $f$  est majorée sur  $[a, b]$  (de même en appliquant à  $-f$  ce qu'on vient de faire, on montre que  $f$  est minorée sur  $[a, b]$ ), et  $f$  est bornée sur  $[a, b]$ .

- Notons maintenant :  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ , et montrons que  $f$  atteint cette valeur  $M$  sur  $[a, b]$ .

Pour cela :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, [M - \frac{1}{n}]$  n'est pas un majorant de  $f$  sur  $[a, b]$  (puisque  $M$  est le plus petit de ces

majorants) et donc :  $\exists x_n \in [a, b], M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$ .

Mais la suite  $(x_n)$  est encore une suite d'éléments de  $[a, b]$  et on peut encore en extraire une suite convergente  $(x_{\psi(n)})$  vers un élément  $\beta$  de  $[a, b]$ , où  $f$  est toujours continue.

On a alors :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, M - \frac{1}{\psi(n)} < f(x_{\psi(n)}) \leq M$ , et en passant à la limite :  $M \leq f(\beta) \leq M$ , soit :  $f(\beta) = M$ .

On montre de même, par exemple à l'aide de  $-f$ , que  $f$  atteint aussi sa borne inférieure  $m$  sur  $[a, b]$ .

- Enfin, l'image de  $[a, b]$  est un intervalle, borné par  $m$  et  $M$ ,  $f([a, b])$  contient les bornes de cet intervalle et donc :  $f([a, b]) = [m, M]$ .

L'image de  $[a, b]$  est donc bien un segment.

### **Théorème 2.4 : monotonie et bijectivité ( $\Rightarrow$ )**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $I$ , alors  $f$  permet de définir une bijection  $f_0$  de  $I$  sur :  $J = f(I)$ , et la bijection réciproque  $f_0^{-1}$  est continue sur  $J$ , de même monotonie que  $f$ .

*Démonstration :*

Supposons  $f$  strictement croissante, quitte à la remplacer par  $-f$ .

- Puisque  $f$  est strictement monotone,  $f_0$  est injective.

En effet :  $\forall (x, x') \in I^2, (x < x') \Rightarrow (f(x) < f(x')) \Rightarrow (f(x) \neq f(x'))$ .

Puis par définition de  $J$ , tout élément de  $J$  a bien un antécédent par  $f_0$  ( $J$  est d'ailleurs un intervalle de  $\mathbb{R}$ ).

Donc  $f_0$  est bien une bijection de  $I$  dans  $J$ .

- Montrons que  $f_0^{-1}$  est de même monotonie que  $f$ , et pour cela, soit :  $\alpha < \beta$ , deux éléments de  $J$ .

Alors :  $\exists (a, b) \in I^2, \alpha = f(a), \beta = f(b)$ .

Si on avait :  $a > b$ ,  $f$  étant strictement croissante, on aurait :  $f(a) > f(b)$ , soit :  $\alpha > \beta$ , ce qui n'est pas le cas. Donc :  $a \leq b$ , et  $\alpha$  et  $\beta$  étant distincts, on a bien finalement :  $a = f_0^{-1}(\alpha) < f_0^{-1}(\beta) = b$ .

• Montrons enfin que  $f_0^{-1}$  est continue.

Soit pour cela :  $y_0 \in J$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f(x_0) = y_0$ , et :  $\varepsilon > 0$ .

Supposons que  $x_0$  ne soit pas une extrémité de  $I$ . Alors :  $\exists \alpha > 0$ ,  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ .

De plus, en posant :  $\alpha' = \min(\alpha, \varepsilon)$ , on a toujours :  $]x_0 - \alpha', x_0 + \alpha'[\subset I$ .

$f$  étant strictement croissante sur  $I$ , on a alors :  $f(x_0 - \alpha') < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \alpha')$ , et donc on peut poser :

$f(x_0 - \alpha') = y_0 - \alpha_1$ , avec :  $\alpha_1 > 0$ , et :  $f(x_0 + \alpha') = y_0 + \alpha_2$ , avec :  $\alpha_2 > 0$ .

Enfin  $f_0^{-1}$  étant strictement croissante sur  $J$ , avec :  $\eta = \min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$ , on a :

$\forall y \in J$ ,  $(|y - y_0| \leq \eta) \Rightarrow (y_0 - \eta \leq y \leq y_0 + \eta) \Rightarrow (y_0 - \alpha_1 \leq y \leq y_0 + \alpha_2) \Rightarrow (x_0 - \alpha' \leq f_0^{-1}(y) \leq x_0 + \alpha')$ .

Soit donc :  $\forall y \in J$ ,  $(|y - y_0| \leq \eta) \Rightarrow (|f_0^{-1}(y) - f_0^{-1}(y_0)| \leq \alpha' \leq \varepsilon)$ .

Autrement dit,  $f_0^{-1}$  est continue en  $y_0$ .

Si enfin,  $x_0$  est une extrémité de  $I$ , il suffit d'oublier soit  $\alpha_1$ , soit  $\alpha_2$  et on adapte la démonstration.

Finalement,  $f_0^{-1}$  est bien continue en tout point de  $J$ , donc continue sur :  $J = f(I)$ .

### **Théorème 2.5 : monotonie de bijectivité ( $\Leftrightarrow$ )**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction continue  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  permet de définir une bijection de  $I$  sur :  $J = f(I)$ , alors  $f$  est strictement monotone.

*Démonstration :*

Supposons  $f$  non strictement monotone sur  $I$ .

Alors il existe :  $a < b < c$ , dans  $I$ , tels que  $[f(a) \leq f(b)$ , et :  $f(c) \leq f(b)]$ , ou  $[f(a) \geq f(b)$ , et :  $f(c) \geq f(b)]$ .

Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , on peut supposer qu'on se trouve dans le premier cas.

Si maintenant l'une des inégalités est une égalité, il y a contradiction avec le fait que  $f$  est une bijection de  $I$  sur  $J$  puisqu'on met alors en évidence deux éléments distincts de  $I$  qui ont même image par  $f$ .

On peut alors noter :  $M = \max(f(a), f(c)) < f(b)$ , et le théorème des valeurs intermédiaires montre que :

•  $\exists x_1 \in [a, b[$ ,  $f(x_1) = M$ , et :

•  $\exists x_2 \in ]b, c]$ ,  $f(x_2) = M$ ,

$x_1$  et  $x_2$  pouvant valoir éventuellement  $a$  et  $c$ .

Mais on a alors trouvé deux éléments distincts de  $I$  qui ont même image par  $f$ , ce qui n'est pas possible.

Finalement,  $f$  est bien strictement monotone sur  $I$ .

### **Théorème 2.6 (hors programme) : de Heine**

Soit :  $I = [a, b]$ , un segment de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Alors  $f$  est uniformément continue sur  $I$ .

*Démonstration :*

Supposons  $f$  non uniformément continue sur  $I$ .

Alors :  $\exists \varepsilon > 0$ ,  $\forall \alpha > 0$ ,  $\exists (x, x') \in [a, b]^2$ ,  $|x - x'| \leq \alpha$ , et :  $|f(x) - f(x')| > \varepsilon$ .

Donc :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\exists (x_n, x'_n) \in [a, b]^2$ ,  $|x_n - x'_n| \leq 2^{-n}$ , et :  $|f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon$ .

La suite  $(x_n, x'_n)$  est alors une suite de  $[a, b] \times [a, b]$ , qui est un ensemble fermé et borné de  $\mathbb{R}^2$ , donc un compact de  $\mathbb{R}^2$ .

Il est alors possible d'en extraire une suite  $(x_{\varphi(n)}, x'_{\varphi(n)})$  convergente vers :  $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ .

Dans ce cas,  $(x_{\varphi(n)})$  converge vers  $\alpha$  et  $(x'_{\varphi(n)})$  converge vers  $\beta$  et  $f$  est continue en  $\alpha$  et en  $\beta$ .

Si maintenant, à partir de :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|x_{\varphi(n)} - x'_{\varphi(n)}| \leq 2^{-\varphi(n)}$ , on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient :  $|\alpha - \beta| \leq 0$ .

Donc :  $\alpha = \beta$ .

Mais de même à partir de :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|f(x_{\varphi(n)}) - f(x'_{\varphi(n)})| > \varepsilon$ , on obtient :  $|f(\alpha) - f(\beta)| \geq \varepsilon$ , soit :  $0 \geq \varepsilon$ .

Cette contradiction montre que  $f$  est bien uniformément continue sur  $[a, b]$ .

## **3. Dérivabilité des fonctions réelles ou complexes de variable réelle.**

### **Définition 3.1 : dérivabilité en un point d'une fonction réelle ou complexe de variable réelle**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbf{K}$ , et soit  $a$  un réel élément de  $I$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $\lim_{h \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  existe dans  $\mathbf{K}$ .

Cette limite est alors notée  $f'(a)$ .

### **Théorème 3.1 : caractérisation de la dérivabilité à l'aide d'un développement limité**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbf{K}$ , et soit  $a$  un réel élément de  $I$ .

$f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si il existe :  $\alpha \in \mathbf{K}$ , et une fonction  $\varepsilon$  telle que, pour tout réel  $h$

vérifiant :  $(a + h) \in I$ , on a :  $f(a + h) = f(a) + \alpha \cdot h + h \cdot \varepsilon(h)$ , avec :  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .

De plus, si  $f$  est dérivable en  $a$ , elle est continue en  $a$ .

*Démonstration :*

•  $[\Rightarrow]$

Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors, la fonction :  $h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ , tend vers  $f'(a)$  quand  $h$  tend vers 0, donc

elle s'écrit :  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon(h)$ , où  $\varepsilon$  est une fonction qui tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

Autrement dit, on peut écrire alors :  $f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + h \cdot \varepsilon(h)$ , ce qui donne bien un développement limité à l'ordre 1 de  $f$  en  $a$  (avec :  $\alpha = f'(a)$ ).

•  $[\Leftarrow]$

Si maintenant, on a :  $f(a+h) = f(a) + \alpha \cdot h + h \cdot \varepsilon(h)$ , alors :  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha + \varepsilon(h)$ , et lorsque  $h$  tend

vers 0, le taux d'accroissement en  $a$  tend vers une limite finie  $\alpha$ , qui est donc égale à  $f'(a)$ .

• Enfin, si :  $f(a+h) = f(a) + \alpha \cdot h + h \cdot \varepsilon(h)$ , il est clair que :  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , et  $f$  est bien continue en  $a$ .

### **Théorème 3.2 : cas des fonctions à valeurs complexes**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ , et soit  $a$  un réel élément de  $I$ .

On note :  $f = \text{Re}(f) + i \cdot \text{Im}(f)$ , où  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Alors  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont dérivables en  $a$ , et on a alors :

$$f'(a) = [\text{Re}(f)]'(a) + i \cdot [\text{Im}(f)]'(a).$$

De plus si  $\bar{f}$  désigne :  $\bar{f} = \text{Re}(f) - i \cdot \text{Im}(f)$ ,  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $\bar{f}$  l'est.

*Démonstration :*

C'est une conséquence du théorème 1.8.

### **Définition 3.2 : dérivabilité à droite et à gauche en un point**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbf{K}$ , et soit  $a$  un réel élément de  $I$ .

On dit que  $f$  est dérivable à droite en  $a$  si et seulement si  $\lim_{h \rightarrow a^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  existe dans  $\mathbf{K}$ .

Cette limite est alors notée  $f'_d(a)$ .

De même on dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  si et seulement si  $\lim_{h \rightarrow a^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  existe dans  $\mathbf{K}$ .

Cette limite est alors notée  $f'_g(a)$ .

### **Théorème 3.3 : lien entre dérivabilité à droite, à gauche et dérivabilité en un point**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbf{K}$ , et soit  $a$  un réel intérieur à  $I$ .

$f$  est alors dérivable en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable à droite et à gauche avec :  $f'_d(a) = f'_g(a)$ .

Dans ce cas on a :  $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$ .

*Démonstration :*

Là encore, c'est une conséquence du théorème 1.2

### **Définition 3.3 : dérivabilité sur un intervalle d'une fonction réelle ou complexe de variable réelle**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbf{K}$ .

On dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  si et seulement si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ .

La fonction  $f'$  ainsi définie est alors appelée fonction dérivée de  $f$ .

### **Théorème 3.4 : dérivabilité d'une combinaison linéaire**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  des fonctions de  $I$  dans  $\mathbf{K}$ , et  $\lambda$  et  $\mu$  des réels.

Pour un élément  $a$  de  $I$ , si  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $a$ , alors  $(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)$  est dérivable en  $a$  et on a :

$$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)'(a) = \lambda \cdot f'(a) + \mu \cdot g'(a).$$

De plus, si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$ , alors  $(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)$  est dérivable sur  $I$ , et on a :  $(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)' = \lambda \cdot f' + \mu \cdot g'$ .

Démonstration :

Même remarque que précédemment, mais cette fois-ci avec le théorème 1.9.

### **Théorème 3.5 : dérivabilité d'un produit ou d'un quotient**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  des fonctions de  $I$  dans  $\mathbf{K}$ .

Pour un élément  $a$  de  $I$ , si  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $a$ , alors  $(f.g)$  est dérivable en  $a$  et on a :

$$(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a).$$

De plus, si  $g(a)$  est non nul, alors  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$ ,  $\frac{f}{g}$  est définie et dérivable au

$$\text{voisinage de } a \text{ et on a : } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$ , alors  $(f.g)$  est dérivable sur  $I$  et :  $(f.g)' = f'.g + f.g'$ .

Si de plus  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $\frac{f}{g}$  est définie et dérivable sur  $I$  et :  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$ .

Démonstration :

• Utilisons ici un développement limité de  $f$  et de  $g$  en  $a$ .

Il existe des fonctions  $\varepsilon_f$  et  $\varepsilon_g$  définies au voisinage de 0 et tendant vers 0 en 0 telles que :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \text{ tel que : } (a+h) \in I, \text{ on a : } f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + h.\varepsilon_f(h), \text{ et : } g(a+h) = g(a) + h.g'(a) + h.\varepsilon_g(h).$$

Alors :  $(f.g)(a+h) = f(a).g(a) + h.[f'(a).g(a) + f(a).g'(a)] + h.\varepsilon(h)$ , où on a posé :

$$\varepsilon(h) = [g(a).\varepsilon_f(h) + h.f'(a).g'(a) + f(a).\varepsilon_f(h) + h.g'(a).\varepsilon_f(h) + h.f'(a).\varepsilon_g(h) + h.\varepsilon_f(h).\varepsilon_g(h)].$$

Comme il est clair que :  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ , cela montre bien que  $(f.g)$  est dérivable en  $a$  de dérivée :

$$(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a), \text{ soit le coefficient de } h \text{ dans le développement limité obtenu.}$$

• On va en fait montrer que sous les mêmes hypothèses,  $\frac{1}{g}$  est dérivable.

On sait déjà (voir le théorème correspondant sur les limites) que  $\frac{1}{g}$  est définie sur un voisinage de  $a$ .

Puis on peut écrire un développement limité de  $g$  en  $a$  :

$$g(a+h) = g(a) + h.g'(a) + h.\varepsilon(h), \text{ avec : } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

$$\text{Alors : } \frac{1}{h} \left( \frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)} \right) = \frac{1}{h} \cdot \frac{-h.g'(a) - h.\varepsilon(h)}{g(a).g(a+h)} = \frac{-g'(a) - \varepsilon(h)}{g(a).g(a+h)}, \text{ au voisinage de } a, \text{ et lorsque } h$$

tend vers 0, puisque  $g$  est continue en  $a$ , ce taux d'accroissement tend vers  $\frac{-g'(a)}{g(a)^2}$ .

Ensuite, pour une fonction  $\frac{f}{g}$ , il suffit de l'écrire  $\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)$ , pour obtenir le résultat attendu.

• Enfin, pour les résultats « sur  $I$  », il suffit de remplacer « sur  $I$  » par « en tout point de  $I$  » et d'appliquer ce qu'on vient d'établir.

### **Théorème 3.6 : $D'(I, \mathbf{K})$**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble des fonctions dérivables de  $I$  dans  $\mathbf{K}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ .

Démonstration :

Avec les théorèmes précédents (th 3.4), il est clair que cet ensemble est inclus dans  $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ , non vide (la fonction nulle lui appartient), et stable par combinaison linéaire.

De plus, le produit de deux fonctions dérivables de  $I$  dans  $\mathbf{K}$  est encore dérivable sur  $I$ , d'après là encore les résultats précédents (th 3.5), donc c'est bien une sous-algèbre de  $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ .

### **Théorème 3.7 : dérivabilité d'une composée**

Soit  $I$  et  $J$  des intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $J$ ,  $g$  une fonction de  $J$  dans  $\mathbf{K}$ .

Soit  $a$  un élément de  $I$ , et :  $b = f(a)$ .

Si  $f$  est dérivable en  $a$  et  $g$  est dérivable en  $b$ , alors  $g \circ f$  est dérivable en  $a$  et :  $(g \circ f)'(a) = g'(b).f'(a)$ .

De plus, si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $g$  est dérivable sur  $J$ , alors  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$  et :  $(g \circ f)' = g' \circ f'$ .

**Démonstration :**

Utilisons à nouveau des développements limités.

On sait que :

$\forall h \in \mathbb{R}$ , tel que :  $(a+h) \in I$ , on a :  $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + h.\varepsilon_f(h)$ , et :

$\forall k \in \mathbb{R}$ , tel que :  $(b+k) \in J$ ,  $g(b+k) = g(b) + k.g'(b) + k.\varepsilon_g(k)$ .

Soit alors :  $h \in \mathbb{R}$ , tel que :  $(a+h) \in I$ , et notons :  $k = h.f'(a) + h.\varepsilon_f(h)$ .

On a dans ce cas :  $g(f(a+h)) = g(f(a) + k) = g(f(a)) + k.g'(f(a)) + k.\varepsilon_g(k)$ .

Or quand  $h$  tend vers 0,  $k$  tend également vers 0, et donc :  $\varepsilon_g(k) = \varepsilon_g(h.f'(a) + h.\varepsilon_f(h))$ , tend vers 0.

On peut alors noter cette dernière fonction :  $\varepsilon_g(k) = \varepsilon_1(h)$ , pour aboutir à :

$g(f(a+h)) = g(f(a)) + [h.f'(a) + h.\varepsilon_f(h)].g'(f(a)) + h.\varepsilon_1(h) = g(f(a)) + h.[f'(a).g'(f(a))] + h.[g'(f(a)).\varepsilon_f(h) + \varepsilon_1(h)]$ .

Si enfin, on note :  $\varepsilon(h) = g'(f(a)).\varepsilon_f(h) + \varepsilon_1(h)$ , on constate qu'on a :

$g(f(a+h)) = g(f(a)) + h.[f'(a).g'(f(a))] + h.\varepsilon(h)$ , avec :  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ , autrement dit,  $g \circ f$  est dérivable en  $a$

et :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a).g'(f(a)).$$

Evidemment, pour  $f$  dérivable sur  $I$  et  $g$  dérivable sur  $J$ , il suffit pour obtenir le résultat voulu de remplacer « sur  $I$  » par « en tout point de  $I$  » et d'appliquerle résultat précédent.

**Théorème 3.8 : dérivabilité d'une réciproque**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que  $f$  est continue, strictement monotone sur  $I$ , donc  $f$  est bijective de  $I$  sur :  $J = f(I)$ .

Soit  $a$  un élément de  $I$ , et :  $b = f(a)$ .

Si  $f$  dérivable en  $a$  avec :  $f'(a) \neq 0$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $b$  et :  $[f^{-1}]'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ .

Si plus généralement  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et on a :

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Enfin, si  $f$  est dérivable en  $a$ , avec :  $f'(a) = 0$ , alors le taux d'accroissement  $\frac{f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)}{k}$  :

- tend vers  $+\infty$  quand  $k$  tend vers 0, si  $f$  est croissante, et
- tend vers  $-\infty$  quand  $k$  tend vers 0, si  $f$  est décroissante.

**Démonstration :**

Soit donc  $f$ , continue et bijective de  $I$  sur :  $J = f(I)$ .

Soit de plus :  $a \in I$ , et :  $b = f(a)$ .

Alors :  $\forall k \in \mathbb{R}$ , tel que :  $(b+k) \in J$ , on a :  $f^{-1}(b+k) = a + h \in I$ , et :  $k = f(a+h) - f(a)$ .

Puis :  $\frac{f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)}{k} = \frac{h}{f(a+h) - f(a)} = \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)^{-1}$ .

Mais comme  $f^{-1}$  est continue, lorsque  $k$  tend vers 0,  $f^{-1}(b+k)$  tend vers :  $f^{-1}(b) = a$ , et  $h$  tend vers 0.

Si alors :  $f'(a) \neq 0$ , le taux d'accroissement précédent tend vers :  $\frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ .

$f^{-1}$  est donc bien dérivable en :  $b = f(a)$ , et :  $[f^{-1}]'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ .

Si par ailleurs, on a :  $f'(a) = 0$ , le taux d'accroissement précédent est :

- positif si  $f$  est croissante car alors  $f^{-1}$  l'est aussi, et tend vers l'infini quand  $k$  tend vers 0, donc vers  $+\infty$ ,
- négatif si  $f$  est décroissante (même raison), et tend vers  $-\infty$  quand  $k$  tend vers 0.

**Théorème 3.9 : de Rolle**

Soit  $f$  une fonction de  $[a,b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est continue sur  $[a,b]$ , dérivable sur  $]a,b[$ , et telle que :  $f(a) = f(b)$ , alors :  $\exists c \in ]a,b[, f'(c) = 0$ .

**Démonstration :**

- Si  $f$  est constante sur  $[a,b]$ , alors  $f'$  est nulle sur  $]a,b[$  et tout  $c$  dans  $]a,b[$  convient.
- Si  $f$  est non constante, elle présente un maximum et un minimum (distincts) sur  $[a,b]$ , qu'elle atteint en

deux valeurs dont l'une au moins est distincte de a et de b.

Notons c cette valeur (qui appartient donc à ]a,b[), et supposons par exemple que cela correspond à un maximum pour f (si c'est un minimum, on remplace f par -f).

Alors :  $\forall x \in ]a,c[$ ,  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ , comme quotient de deux nombres négatifs, et lorsque x tend vers c

(par valeurs inférieures), ce taux d'accroissement tend vers  $f'_g(c)$  qui est donc négatif ou nul.

Ce même :  $\forall x \in ]c,b[$ ,  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ , comme quotient de deux nombres de signes contraires, et

lorsque x tend vers c (par valeurs supérieures), ce taux d'accroissement tend vers  $f'_d(c)$  qui est donc positif ou nul.

Enfin, puisque  $f'(c)$  est la valeur commune de  $f'_g(c)$  et  $f'_d(c)$ , on a finalement :  $0 \leq f'(c) \leq 0$ , et :  $f'(c) = 0$ .

### **Théorème 3.10 : des accroissements finis**

Soit f une fonction de [a,b] dans  $\mathbb{R}$ .

Si f est continue sur [a,b], dérivable sur ]a,b[, alors :  $\exists c \in ]a,b[$ ,  $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$ .

*Démonstration :*

Notons  $\varphi$  la fonction :  $\forall x \in [a,b]$ ,  $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda \cdot (x - a)$ ,

et choisissons  $\lambda$  de telle sorte que :  $\varphi(b) = 0$ , soit :  $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

La fonction  $\varphi$  est alors définie et continue sur [a,b], dérivable sur ]a,b[, et vérifie :  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ .

Donc :  $\exists c \in ]a,b[$ ,  $\varphi'(c) = 0$ , soit encore :  $f'(c) - \lambda = 0$ .

Finalement c vérifie :  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , soit bien ce que l'on voulait.

### **Théorème 3.11 : dérivabilité par passage à la limite dans la dérivée**

Soit I un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et f une fonction de I dans  $\mathbb{R}$ , continue sur I.

Soit a un élément de I telle que de plus f soit dérivable sur  $I - \{a\}$ , et f' admette une limite L en a.

Alors f est dérivable en a,  $f'(a) = L$ , et f' est continue en a.

*Démonstration :*

Soit :  $\varepsilon > 0$ .

On sait que :  $\exists \alpha > 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $(|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|f'(x) - L| \leq \varepsilon)$ .

Soit alors :  $x \in I$ , tel que :  $|x - a| \leq \alpha$ .

Alors :  $\exists c_x \in ]a,x[$  (ou  $]x,a[$ ), tel que :  $f(x) - f(a) = (x - a) \cdot f'(c_x)$ , et :  $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| = |f'(c_x) - L| \leq \varepsilon$ .

Autrement dit :  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \alpha > 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $(|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow \left( \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| \leq \varepsilon \right)$ .

On vient donc de montrer que le taux d'accroissement de f en a tend vers L, c'est-à-dire que f est dérivable en a (éventuellement uniquement à droite ou à gauche) et que :  $f'(a) = L$ .

Enfin on peut réécrire alors :  $L = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ , en :  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \alpha > 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $(|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|f'(x) - f'(a)| \leq \varepsilon)$ , ce qui exprime bien que f' est continue en a.

### **Théorème 3.12 : lien entre monotonie d'une fonction à valeurs réelles et signe de sa dérivée**

Soit I un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et f une fonction de I dans  $\mathbb{R}$ , continue et dérivable sur I.

Alors :

- (f est constante sur I)  $\Leftrightarrow (f' = 0)$ ,
- (f est croissante sur I)  $\Leftrightarrow (f' \geq 0)$ ,
- (f est décroissante sur I)  $\Leftrightarrow (f' \leq 0)$ .

De plus, si f' est strictement positive (respectivement négative) et ne s'annule au plus qu'en un nombre fini de valeurs, alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I.

*Démonstration :*

- [ $\Rightarrow$ ]

Le sens direct de ces trois équivalences est immédiat, en examinant par exemple le taux d'accroissement de f en tout point de I, qui est bien nul si f est constante, positif si f est croissante, négatif si f est décroissante, et f' en a a les mêmes propriétés.

• [ $\Leftarrow$ ]

Il suffit d'appliquer alors, pour :  $a < b$ , dans  $I$ , le théorème des accroissements finis sur  $[a, b]$ , pour obtenir les implications réciproques.

• Supposons maintenant  $f'$  strictement positive sur  $I$ , et supposons de plus  $f$  non strictement croissante.

Alors :  $\exists a < b$ ,  $f(a) \geq f(b)$ , et :  $\exists c \in ]a, b[$ ,  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$ , ce qui est contradictoire.

Donc  $f$  est bien strictement croissante sur  $I$ .

Le cas où  $f'$  est strictement négative se traite de la même façon (ou avec  $-f$ ).

### Définition 3.4 : fonction de classe $C^1$ , $C^k$ , $C^\infty$ de variable réelle à valeurs réelles ou complexes

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbf{K}$ .

On dit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  si et seulement si  $f$  est dérivable sur  $I$ , et  $f'$  est continue sur  $I$ .

Pour :  $k \geq 1$ , on dit de plus que  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  si et seulement si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $f'$  est de classe  $C^{k-1}$  sur  $I$ .

Enfin, on dit que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$  si et seulement si  $f$  est de classe  $C^k$  pour tout :  $k \in \mathbb{N}$ .

### Théorème 3.13 : combinaison linéaire et produit de fonctions de classe $C^n$ et formule de Leibniz

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  des fonctions de  $I$  dans  $\mathbf{K}$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  des éléments de  $\mathbf{K}$ .

Soit :  $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ .

Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^n$  sur  $I$ , alors pour tous  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbf{K}$ ,  $(\lambda.f + \mu.g)$  est de classe  $C^n$  sur  $I$ , et :

$$\forall x \in I, \forall p \leq n, (\lambda.f + \mu.g)^{(p)}(x) = \lambda.f^{(p)}(x) + \mu.g^{(p)}(x).$$

De plus le produit  $(f.g)$  est de classe  $C^n$  sur  $I$ , et :  $\forall p \leq n, [f.g]^{(p)} = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} f^{(i)} \cdot g^{(p-i)}$ .

Enfin, si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $\frac{f}{g}$  est de classe  $C^n$  sur  $I$ .

L'ensemble des fonctions de classe  $C^n$  de  $I$  dans  $\mathbf{K}$ , noté  $C^n(I, \mathbf{K})$ , est une sous-algèbre de  $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ .

Démonstration :

• Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^n$  sur  $I$ , la linéarité de l'opération « dérivation sur  $I$  », permet de montrer par récurrence sur :  $0 \leq k \leq n$ , que :  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, [\lambda.f + \mu.g]$  est de classe  $C^k$  sur  $I$ , pour tout :  $0 \leq k \leq n$ , et que l'égalité proposée est vérifiée.

• Pour  $f$  et  $g$  de classe  $C^0$  sur  $I$ , on sait déjà que  $[f.g]$  est continue donc de classe  $C^0$  sur  $I$ .

On a vu aussi précédemment que si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$  sur  $I$ ,  $[f.g]$  est dérivable sur  $I$ , que :

$$[f.g]' = f'.g + f.g', \text{ et il est alors clair que } [f.g]' \text{ est continue sur } I, \text{ donc que } [f.g] \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I.$$

Si maintenant  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^n$  sur  $I$ , avec :  $n \geq 2$ , et si on suppose alors que  $[f.g]$  est de classe  $C^{n-1}$

sur  $I$ , avec :  $[f.g]^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} f^{(i)} \cdot g^{(n-1-i)}$ , alors comme combinaison linéaire de produits de fonctions

dérivables sur  $I$ ,  $[f.g]^{(n-1)}$  est dérivable sur  $I$ , et :

$$([f.g]^{(n-1)})' = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (f^{(i)} \cdot g^{(n-1-i)})' = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (f^{(i+1)} \cdot g^{(n-1-i)} + f^{(i)} \cdot g^{(n-i)}).$$

On réécrit alors cette somme en :  $([f.g]^{(n-1)})' = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} f^{(i)} \cdot g^{(n-i)} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} f^{(i)} \cdot g^{(n-i)}$ .

On écrit alors à part les valeurs :  $i = n$ , (première somme) et :  $i = 0$  (deuxième somme) pour aboutir à :

$$([f.g]^{(n-1)})' = 1.f^{(n)}.g^{(0)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \right] f^{(i)} \cdot g^{(n-i)} + 1.f^{(0)}.g^{(n)}.$$

Enfin, à l'aide de la relation (triangle de Pascal) :  $\forall 1 \leq i \leq n-1, \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} = \binom{n}{i}$ , et en

regroupant les deux derniers termes, on termine avec :

$$[f.g]^{(n)} = ([f.g]^{(n-1)})' = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} \cdot g^{(n-i)}, \text{ c'est-à-dire la formule attendue pour : } k = n.$$

Comme de plus, la fonction précédente est continue sur  $I$ ,  $[f.g]$  est bien de classe  $C^n$  sur  $I$ .

- Si g maintenant ne s'annule pas sur I,  $\frac{f}{g}$  est dérivable sur I.

En procédant à l'aide d'une récurrence identique à la précédente, elle est alors de classe  $C^n$  sur I, en utilisant en particulier le fait que si f et g sont au moins de classe  $C^1$  sur I, alors :  $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ .

- Enfin,  $C^n(I, \mathbf{K})$  est inclus dans  $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ , non vide puisque la fonction nulle est de classe  $C^\infty$  sur I, et stable par combinaison linéaire et par produit, comme on vient de le démontrer au-dessus.

### **Théorème 3.14 : formule de Taylor-Lagrange**

Soit  $[a, b]$  un segment inclus dans  $\mathbb{R}$ , n un entier naturel et f une fonction de classe  $C^n$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , (n+1) fois dérivable sur  $]a, b[$ .

Alors :  $\exists c \in ]a, b[$ ,

$$f(b) = f(a) + (b-a).f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}.f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(c)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!}.f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(c).$$

*Démonstration :*

Soit :  $A \in \mathbb{R}$ , et posons  $\varphi$  la fonction définie sur  $[a, b]$  par :

$$\forall x \in [a, b], \varphi(x) = f(x) - f(a) - (x-a).f'(a) - \dots - \frac{(x-a)^n}{n!}.f^{(n)}(a) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.A.$$

On peut alors choisir A de telle sorte que :  $\varphi(b) = 0$ .

On remarque ensuite que :  $\varphi(a) = 0$ .

Puis  $\varphi$  est de classe  $C^n$  sur  $]a, b[$ , (n+1) fois dérivable sur  $]a, b[$ , et :  $\forall 0 \leq k \leq n, \forall x \in ]a, b[$ ,

$$\varphi^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - f^{(k)}(a) - \frac{(x-a)}{k+1}.f^{(k+1)}(a) - \dots - \frac{k!}{n!}.(x-a)^{n-k}.f^{(n)}(a) - \frac{k!}{(n+1)!}.(x-a)^{n+1-k}.A$$

De même, on a :  $\forall x \in ]a, b[$ ,  $\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - A$ .

Puis, étant donné que :  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ , il existe :  $c_1 \in ]a, b[$ ,  $\varphi'(c_1) = 0$ .

De même, comme :  $\varphi'(a) = \varphi'(c_1) = 0$ , il existe :  $c_2 \in ]a, b[$ ,  $\varphi''(c_2) = 0$ , et ainsi de suite (récurrence) jusqu'à ce que :  $\exists c_{n+1} \in ]a, b[$ ,  $\varphi^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$ .

Cette dernière égalité donne en particulier :  $A = f^{(n+1)}(c_{n+1})$ , et en reprenant :  $\varphi(b) = 0$ , on en déduit :

$$f(b) - f(a) - (b-a).f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^n}{n!}.f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0.$$

Si on appelle enfin c le réel  $c_{n+1}$  trouvé, et en réécrivant cette dernière égalité, on obtient l'affirmation annoncée dans le libellé du théorème 3.14.

### **Remarque 3.1 :**

Ce résultat s'applique donc en particulier aux fonctions de classe  $C^{n+1}$  sur  $[a, b]$ .

### **Remarque 3.2 :**

Il existe également une formule de Taylor-Young avec reste intégral qui sera énoncé dans le chapitre « Intégration ».

## **4. Fonctions réelles de variable réelle : fonctions équivalentes, fonctions négligeables.**

### **Définition 4.1 et théorème 4.1 : fonctions équivalentes entre elles en un point**

Soit I un intervalle de  $\mathbb{R}$  avec :  $a \in I$ , (ou :  $a = \pm\infty$ , si I n'est pas majoré (minoré)).

Soient f et g des fonctions définies de I dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que f et g sont équivalentes en a si et seulement si il existe une fonction  $\varepsilon$  définie de I dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = g(x).(1 + \varepsilon(x)), \text{ avec : } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

On écrit alors :  $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ .

Lorsque f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, il est équivalent d'écrire :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

*Démonstration :*

• [⇒]

Si :  $\forall x \in I, f(x) = g(x) \cdot (1 + \varepsilon(x))$ , avec :  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ , alors :  $\forall x \in I, \frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \varepsilon(x)$ , et comme  $\varepsilon$  tend

vers 0 en a, il est clair que :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

• [⇐]

Si maintenant :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , on peut poser :  $\forall x \in I, \varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$ , et on a bien :

$\forall x \in I, f(x) = g(x) \cdot (1 + \varepsilon(x))$ , et :  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .

#### **Définition 4.2 et théorème 4.2 : fonction négligeable devant une autre en un point**

Soit I un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et soit :  $a \in I$ , (ou :  $a = \pm\infty$ , si I n'est pas majoré (minoré)).

Soient f et g des fonctions définies de I dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que f est négligeable devant g en a si et seulement si il existe une fonction  $\varepsilon$  définie de I dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$\forall x \in I, f(x) = g(x) \cdot \varepsilon(x)$ , avec :  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .

On écrit alors :  $f(x) = o(g(x))$ , en a.

Lorsque f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, il est équivalent d'écrire :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

*Démonstration :*

Lé démonstration est identique à la précédente.

• [⇒]

Si :  $\forall x \in I, f(x) = g(x) \cdot \varepsilon(x)$ , avec :  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ , alors :  $\forall x \in I, \frac{f(x)}{g(x)} = \varepsilon(x)$ , et comme  $\varepsilon$  tend vers 0 en

a, il est clair que :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

• [⇐]

Si maintenant :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , on peut poser :  $\forall x \in I, \varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , et on a bien :

$\forall x \in I, f(x) = g(x) \cdot \varepsilon(x)$ , et :  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .

## **5. Développements limités.**

### **Définition 5.1 : développement limité d'une fonction en 0**

Soit I un intervalle de  $\mathbb{R}$ , tel que :  $0 \in I$ .

Soit f une fonction définie de I dans  $\mathbb{R}$ , et soit :  $n \in \mathbb{N}$ .

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 (ou  $DL_n(0)$ ) si et seulement si il existe :

$P \in \mathbb{R}[X]$ , tel que :

•  $\deg(P) \leq n$ ,

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - P(x)}{x^n} \right) = 0$ , ou encore :  $f(x) = P(x) + o(x^n) = P(x) + x^n \cdot \varepsilon(x)$ , avec :  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .

P est alors appelé partie régulière du développement limité de f en 0.

### **Définition 5.2 : développement limité d'une fonction en un point a**

Soit I un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et soit :  $a \in I$

Soit  $f$  une fonction définie de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , et soit :  $n \in \mathbb{N}$ .

On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  (ou  $DL_n(a)$ ) en  $a$  si et seulement si la fonction  $g$ , définie de :  $J = \{t \in \mathbb{R}, a + t \in I\}$  dans  $\mathbb{R}$  par :  $\forall t \in J, g(t) = f(a + t)$ , admet un  $DL_n(0)$ .

Soit encore, si et seulement si il existe :  $P \in \mathbb{R}[X]$ , tel que :

- $\deg(P) \leq n$ ,
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x-a)}{(x-a)^n} = 0$ , ou :  $f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n) = P(x-a) + (x-a)^n \cdot \varepsilon(x)$ , où :  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .

$P$  est encore appelé partie régulière du développement limité de  $f$  en  $a$ .

### Définition 5.3 : développement limité ou asymptotique d'une fonction en $+\infty$

Soit  $I$  un intervalle non majoré de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f$  une fonction définie de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , et soit :  $n \in \mathbb{N}$ .

On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $+\infty$  (ou  $DL_n(+\infty)$ ) si et seulement si la fonction  $g$ , définie de :  $J = \{t \in \mathbb{R}, \frac{1}{t} \in I\}$ , dans  $\mathbb{R}$  par :  $\forall t \in J, g(t) = f(\frac{1}{t})$ , admet un  $DL_n(0)$ .

Soit encore si et seulement si il existe :  $P \in \mathbb{R}[X]$ , tel que :

- $\deg(P) \leq n$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^n \cdot f(x) - P(\frac{1}{x})) = 0$ , ou :  $f(x) = P(\frac{1}{x}) + o(\frac{1}{x^n}) = P(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^n} \cdot \varepsilon(x)$ , où :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$ .

$P$  est encore appelé partie régulière du développement limité de  $f$  en  $+\infty$ .

### Théorème 5.1 : unicité d'un développement limité d'ordre $n$

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et soit :  $a \in I$

Soit  $f$  une fonction définie de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , et soit :  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $f$  admet un  $DL_n(a)$ , alors la partie régulière de ce développement limité est unique.

De plus,  $f$  est continue en  $a$ .

Démonstration :

On va faire la démonstration pour :  $a = 0$ , quitte à remplacer  $f$  par  $g : h \mapsto f(a + h)$ .

Supposons que  $f$  admette deux développements limités en 0 :

$$\forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n) = Q(x) + o(x^n), \text{ avec : } P = \sum_{k=0}^n a_k \cdot X^k, \text{ et : } Q = \sum_{k=0}^n b_k \cdot X^k.$$

Si  $P$  et  $Q$  sont différents, en notant  $p$  correspondant au terme de plus bas degré de  $(P - Q)$ , on a :

$$P - Q = \sum_{k=p}^n (a_k - b_k) \cdot X^k, \text{ et : } a_p - b_p \neq 0.$$

$$\text{Alors : } \forall x \in I, P(x) - Q(x) = x^p \cdot (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)), \text{ soit : } (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)) = \frac{1}{x^{n-p}} \cdot \sum_{k=p}^n (a_k - b_k) \cdot x^{k-p}.$$

On constate alors que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=p}^n (a_k - b_k) \cdot x^{k-p} = a_p - b_p \neq 0$ , et comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x^{n-p}} \right|$  vaut 1 ou  $+\infty$ , il est clair

que  $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$  ne peut pas tendre vers 0, lorsque  $x$  tend vers 0.

Donc finalement :  $P = Q$ , et le développement limité de  $f$  en 0 est unique.

De plus, puisque :  $\forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n) = P(x) + x^n \cdot \varepsilon(x)$ , avec :  $n \geq 0$ , il est clair que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = P(0) = f(0), \text{ et } f \text{ est continue en } 0.$$

### Théorème 5.2 : cas des fonctions paires et impaires

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , tel que :  $0 \in I$ , et  $I$  est symétrique par rapport à 0.

Soit  $f$  une fonction définie de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , et soit :  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $f$  admet un  $DL_n(0)$  du type :  $\forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n)$ , avec :  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , et :

- si  $f$  est paire, alors  $P$  est un polynôme pair,
- si  $f$  est impaire, alors  $P$  est un polynôme impair.

Démonstration :

On suppose donc que  $f$  admet un  $DL_n(0)$  du type :  $\forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n)$ , avec :  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

Supposons de plus  $f$  paire.

On a alors :  $\forall x \in I, f(-x) = P(-x) + (-1)^n \cdot x^n \cdot \varepsilon(-x) = f(x) = P(x) + x^n \cdot \varepsilon(x)$ .

Or :  $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^n \cdot \varepsilon(-x) = 0$ , donc :  $\forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n)$ , constitue un  $DL_n(0)$  de  $f$ .

Comme la partie régulière d'un tel  $DL_n(0)$  est unique, on a :

$\forall x \in I, P(-x) = P(x)$ , et cette égalité entre fonctions polynomiales étant valable pour une infinité de valeurs de  $x$ , on en déduit l'égalité de polynômes :  $P(X) = P(-X)$ .

Le polynôme  $P$  est donc pair.

La démonstration s'adapte complètement si  $f$  est dans un autre cas supposée impaire.

## 6. Obtention de développements limités, opérations sur les développements limités.

### **Théorème 6.1 : utilisation de la formule de Taylor**

Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  tel que :  $a \in I$ , et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^n$ , avec :  $n \in \mathbb{N}$ , et  $(n+1)$  fois dérivable en  $a$ .

Alors  $f$  admet de même un  $DL_{n+1}(a)$  tel que :  $\forall x \in I$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(a) + o((x-a)^{n+1}).$$

En particulier, si  $f$  est une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  avec :  $0 \in I$ , de classe  $C^n$ , avec :  $n \geq 0$ ,  $(n+1)$  fois dérivable en  $0$ .

Alors  $f$  admet un  $DL_{n+1}(0)$ , égal à :  $\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^{n+1})$ .

En particulier, si  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$ , alors  $f$  admet un développement limité à tout ordre et en tout point de  $I$ .

*Démonstration :*

Soit :  $x \in I$ , et  $\varphi_x$  la fonction inspirée de la démonstration de la démonstration 3.14, soit :

$$\forall t \in I, \varphi_x(t) = f(t) - f(a) - (t-a) \cdot f'(a) - \dots - \frac{(t-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) - \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A_x,$$

et on choisit  $A_x$  tel que :  $\varphi_x(x) = 0$ .

Dans ce cas, on peut trouver :  $c_{n,x} \in ]a, x[$ , tel que :  $\varphi_x^{(n)}(c_{n,x}) = 0$ .

Cette dernière égalité se traduit par :  $f^{(n)}(c_{n,x}) - f^{(n)}(a) - (c_{n,x} - a) \cdot A_x = 0$ , et :  $A_x = \frac{f^{(n)}(c_{n,x}) - f^{(n)}(a)}{c_{n,x} - a}$ .

Comme  $f^{(n)}$  est supposée de plus dérivable en  $a$ , on a :

$$\forall t \in ]a, x[, f^{(n)}(t) = f^{(n)}(a) + (t-a) \cdot f^{(n+1)}(a) + o(t-a),$$

et donc :  $A_x = f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(c_{n,x} - a)$ , où  $\varepsilon$  est une fonction définie sur  $]0, x - a[$ , qui tend vers 0 en 0.

Finalement, si on retraduit l'égalité :  $\varphi_x(x) = 0$ , on aboutit à :

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(a) + o((x-a)^{n+1}),$$

puisque le terme final s'écrit :  $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \varepsilon(c_{n,x} - a)$ , et la quantité  $\varepsilon$  tend bien vers 0 quand  $x$  tend vers  $a$ .

Ensuite le cas où :  $a = 0$ , est un cas particulier du cas précédent.

La remarque finale dans le cas d'une fonction  $C^\infty$  sur  $I$  est immédiate.

### **Théorème 6.2 : somme, produit par un scalaire, et produit de fonctions admettant des $DL_n(0)$**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , tel que :  $0 \in I$ , et soit :  $n \in \mathbb{N}$ .

Soient  $f$  et  $g$  des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , admettant des  $DL_n(0)$ , et donc telles que :

$$\exists (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n), g(x) = Q(x) + o(x^n).$$

Alors  $(f + g)$  admet un  $DL_n(0)$  qui vaut :

$$\forall x \in I, (f + g)(x) = [P(x) + Q(x)] + o(x^n).$$

De même, si on note  $R$  le polynôme obtenu en tronquant le produit  $(P \cdot Q)$  au degré  $n$ , alors  $(f \cdot g)$  admet un  $DL_n(0)$  qui vaut :

$$\forall x \in I, (f \cdot g)(x) = R(x) + o(x^n).$$

Enfin, pour tout :  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda \cdot f)$  admet un  $DL_n(0)$  qui vaut :

$$\forall x \in I, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot P(x) + o(x^n).$$

**Démonstration :**

On suppose donc que  $f$  et  $g$  admettent des  $DL_n(0)$  comme indiqué

• Alors :

$$\forall x \in I, (f + g)(x) = (P(x) + Q(x)) + x^n \cdot \varepsilon_f(x) + x^n \cdot \varepsilon_g(x).$$

Or :  $(P + Q) \in \mathbb{R}[X]$ , avec :  $\deg(P + Q) \leq n$ , et :  $\lim_{x \rightarrow 0} (\varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)) = 0$ .

Donc :  $\forall x \in I, (f + g)(x) = (P + Q)(x) + o(x^n)$ .

• De même, si on note :  $A = P \cdot Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , on peut écrire  $A$ , sous la forme :  $A = R + X^n \cdot B$ , où :  $\deg(R) \leq n$ , et où  $X^n \cdot B$  rassemble tous les termes de degré strictement supérieur à  $n$  du polynôme  $A$ .

Donc on peut alors écrire :

$$\forall x \in I, (f \cdot g)(x) = (P(x) + x^n \cdot \varepsilon_f(x)) \cdot (Q(x) + x^n \cdot \varepsilon_g(x)) = R(x) + x^n \cdot \varepsilon(x), \text{ avec :}$$

$$\forall x \in I, \varepsilon(x) = B(x) + Q(x) \cdot \varepsilon_f(x) + P(x) \cdot \varepsilon_g(x) + x^n \cdot \varepsilon_f(x) \cdot \varepsilon_g(x).$$

Or tous les termes dans  $B$  sont de degré au moins égal à 1, donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} B(x) = 0$ .

Et comme il est clair que tous les autres termes constituant  $\varepsilon$  ont une limite nulle en 0, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0, \text{ et donc que : } \forall x \in I, (f \cdot g)(x) = R(x) + o(x^n).$$

• Il suffit d'écrire pour terminer que :

$$\forall x \in I, (\lambda \cdot f)(x) = (\lambda \cdot P)(x) + \lambda \cdot x^n \cdot \varepsilon_f(x), \text{ et :}$$

$$(\lambda \cdot P) \in \mathbb{R}_n[X], \deg(\lambda \cdot P) \leq n, \text{ et : } \lim_{x \rightarrow 0} \lambda \cdot \varepsilon_f(x) = 0.$$

### **Théorème 6.3 : composition de fonctions admettant des $DL_n(0)$**

Soient  $I$  et  $J$  des intervalles de  $\mathbb{R}$ , tels que 0 soit intérieur à  $I$  et à  $J$ , et soit :  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $g$  une fonction de  $J$  dans  $\mathbb{R}$  admettant un  $DL_n(0)$  et donc telles que :

$$\exists (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n), \forall x \in J, g(x) = Q(x) + o(x^n),$$

et telles que de plus :  $f(0) = 0$ .

Alors  $g \circ f$  est définie sur un voisinage de 0 inclus dans  $I$ , et admet un  $DL_n(0)$ .

**Démonstration :**

• Tout d'abord, puisque  $f$  admet un  $DL$  en 0,  $f$  est continue en 0, et :  $f(0) = 0$ .

Comme  $J$  est un intervalle, et :  $0 \in J$ , il existe :  $\varepsilon > 0$ , tel que :  $[-\varepsilon, +\varepsilon] \subset J$ .

La continuité de  $f$  en 0 garantit alors que :  $\exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - 0| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon)$ ,

et :  $I_1 = I \cap [-\eta, +\eta]$ , est encore un intervalle sur lequel  $g \circ f$  est définie.

• Notons maintenant :  $P = \sum_{k=0}^n a_k \cdot X^k$ , et :  $Q = \sum_{k=0}^n b_k \cdot X^k$ .

Alors :  $f(0) = P(0) = 0$ , et :  $a_0 = 0$ .

$$\text{Alors : } \forall x \in I, g(f(x)) = Q(P(x) + x^n \cdot \varepsilon_f(x)) + [P(x) + x^n \cdot \varepsilon_f(x)]^n \cdot \varepsilon_g(P(x) + x^n \cdot \varepsilon_f(x)).$$

$$\text{On a alors : } Q(P(x) + x^n \cdot \varepsilon_f(x)) = \sum_{k=0}^n b_k \cdot \left( \sum_{j=1}^n a_j \cdot x^j + x^n \cdot \varepsilon_f(x) \right)^k.$$

Or si on développe cette dernière expression, on voit apparaître plusieurs termes, certains polynomiaux de degré inférieur ou égal à  $n$ , d'autres polynomiaux de degré strictement supérieur à  $n$ , et enfin des termes comportant (au moins) un facteur égal à  $\varepsilon_f(x)$ , et dans ce cas également au moins un facteur  $x^n$ , le reste des facteurs intervenant dans ces termes étant soit en  $x^p$  soit en  $\varepsilon_f(x)^p$ .

Autrement dit, on peut le mettre sous la forme :  $Q(P(x) + x^n \cdot \varepsilon_f(x)) = R(x) + x^n \cdot \varepsilon(x)$ , où  $\varepsilon$  est une fonction qui tend vers 0 en 0.

### **Théorème 6.4 : primitivation d'un $DL_n(0)$**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , tel que :  $0 \in I$ , et soit :  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $f$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , et soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Si  $f$  admet un  $DL_n(0)$ ,  $F$  admet un  $DL_{n+1}(0)$  qui s'obtient en primitivant terme à terme le  $DL_n(0)$  de  $f$ .

**Démonstration :**

Supposons donc que :  $\forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n) = P(x) + x^n \cdot \varepsilon(x)$ , avec :  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , et notons :

$$\forall x \in I, F(x) = \int_0^x f(t) \cdot dt = \int_0^x P(t) \cdot dt + \int_0^x t^n \cdot \varepsilon(t) \cdot dt, \text{ qui existe puisque } f \text{ est continue sur } I.$$

$$\text{Puisque : } P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ on a : } \forall x \in I, P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k, \text{ et : } \int_0^x P(t) \cdot dt = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X].$$

Montrons que :  $\int_0^x t^n \cdot \mathcal{E}(t) \cdot dt = o(x^{n+1})$ .

Pour cela :  $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x| \leq \eta) \Rightarrow (|\mathcal{E}(x)| \leq \varepsilon_1)$ .

Donc :  $\forall x \in I, (|x| \leq \eta) \Rightarrow \left| \int_0^x t^n \cdot \mathcal{E}(t) \cdot dt \right| \leq \left| \int_0^x t^n \cdot |\mathcal{E}(t)| \cdot dt \right| \leq \varepsilon_1 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$ ,

autrement dit,  $\int_0^x t^n \cdot \mathcal{E}(t) \cdot dt$  est le produit de  $x^{n+1}$  avec une fonction qui tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

Finalement :  $\forall x \in I, F(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$ , c'est-à-dire que  $F$  admet un  $DL_{n+1}(0)$ , obtenu en primitivant terme à terme celui de  $f$ .

### **Théorème 6.5 : dérivation d'un $DL_n(0)$**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , tel que :  $0 \in I$ , et soit :  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ .

Si  $f$  admet un  $DL_n(0)$  et  $f'$  un  $DL_{n-1}(0)$ , alors le  $DL_{n-1}(0)$  de  $f'$  s'obtient en dérivant terme à terme le  $DL_n(0)$  de  $f$ .

*Démonstration :*

Il suffit de remarquer que  $f$  est dans ce cas une primitive de  $f'$  sur  $I$ , et donc qu'on passe du  $DL(0)$  de  $f'$  à celui de  $f$  en primitivant terme à terme ce qui est équivalent à dire qu'on passe de celui de  $f$  à celui de  $f'$  en le dérivant terme à terme.

## **7. Développements limités de fonctions classiques.**

### **Théorème 7.1 : développements limités classiques**

Les fonctions suivantes admettent des développements limités à tout ordre  $n$  (ou  $2.n, (2.n+1)$ ) en 0, et ces développements sont ceux indiqués.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2.k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2.n)!} + o(x^{2n+1})$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2.k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2.n+1)!} + o(x^{2n+2})$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2.k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2.n)!} + o(x^{2n+1})$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2.k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2.n+1)!} + o(x^{2n+2})$ ,
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in ]-1, +\infty), (1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + o(x^n)$ ,
- $\forall x \in ]-1, +\infty), \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n \cdot x^n + o(x^n)$ ,
- $\forall x \in (-\infty, 1], \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$ ,
- $\forall x \in ]-1, +\infty), \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n)$ ,
- $\forall x \in (-\infty, 1], \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2.k+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2.n+1} + o(x^{2n+2})$ ,

- $\forall x \in ]-1, +1[, \operatorname{Argth}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}),$
- $\forall x \in ]-1, +1[, \operatorname{Arcsin}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + o(x^{2n+2}).$

**Démonstration :**

- $\exp$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp^{(n)}(x) = \exp(x)$ , en particulier :  $\exp^{(n)}(0) = 1$ .  
Donc  $\exp$  admet un  $DL_n(0)$ , pour tout :  $n \in \mathbb{N}$ , qui est celui indiqué.
- $\cos$  et  $\sin$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sin^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}), \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}).$

En particulier :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

- si :  $n = 2.p, \sin^{(n)}(0) = \sin(p.\pi) = 0, \cos^{(n)}(0) = \cos(p.\pi) = (-1)^p,$
- si :  $n = (2.p + 1), \sin^{(n)}(0) = \sin(\frac{\pi}{2} + p.\pi) = (-1)^p, \cos^{(n)}(0) = \cos(\frac{\pi}{2} + p.\pi) = 0.$

On en déduit que  $\sin$  et  $\cos$  admettent des  $DL(0)$  à tout ordre:  $n \in \mathbb{N}$ , qui sont ceux indiqués.

- Les  $DL(0)$  de  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$  se déduisent de ceux de  $\exp(x)$  et  $\exp(-x)$  sur  $\mathbb{R}$ , en remarquant que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} + (-x)^n \cdot \mathcal{E}(-x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{x^k}{k!} + x^n \cdot (-1)^n \cdot \mathcal{E}(-x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{x^k}{k!} + o(x^n),$$

et que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$

- Si on note :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in ]-1, +\infty), f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$ , alors  $f_\alpha$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]-1, +\infty)$  et admet donc un  $DL_n(0)$  pour tout :  $n \in \mathbb{N}$ .

De plus :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-1, +\infty), f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1) \cdot (1+x)^{\alpha-n}$ , et :  $f_\alpha^{(n)}(0) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)$ , et on en déduit que le  $DL_n(0)$  de  $f_\alpha$  est bien celui indiqué.

- Pour :  $\forall x \in ]-1, +\infty), f(x) = \frac{1}{1+x}$ , on peut utiliser le  $DL_n(0)$  précédent pour :  $\alpha = -1$ , ou remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-1, +\infty), \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot x^k = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x}, \text{ comme somme des } (n+1) \text{ premiers termes d'une}$$

suite géométrique et que :

$$\frac{(-x)^{n+1}}{1+x} = x^n \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot x}{1+x} = x^n \cdot \mathcal{E}(x) = o(x^n), \text{ ce qui donne bien le } DL_n(0) \text{ annoncé.}$$

- Ici, on a :  $\forall x \in (-\infty, +1[, u = -x \in ]-1, +\infty)$ , et :

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot u^k + u^n \cdot \mathcal{E}(u) = \sum_{k=0}^n x^k + x^n \cdot (-1)^n \cdot \mathcal{E}(-x) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n).$$

On peut aussi utiliser directement la somme des  $(n+1)$  premiers termes d'une suite géométrique.

- Pour :  $\forall x \in (-\infty, +1[, \ln(1-x)$ , et :  $\forall x \in ]-1, +\infty)$ , il suffit de primitiver les  $DL(0)$  précédents, en remarquant que pour les deux fonctions, la constante d'intégration est nulle.

- $\forall x \in \mathbb{R}, u = x^2 \in ]-1, +\infty)$ , donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot x^{2k} + o(x^{2n+1})$ , puisque la fonction est paire.

Donc on peut intégrer la dernière égalité sur  $\mathbb{R}$ , et on constate ainsi que  $\operatorname{Arctan}$  admet sur  $\mathbb{R}$  un  $DL_{2n+2}(0)$ , pour tout :  $n \in \mathbb{N}$ , en notant que la constante d'intégration est nulle.

- De même :  $\forall x \in ]-1, +1[, u = -x^2 \in (-\infty, +1]$ , et en utilisant le fait que :  $\forall x \in ]-1, +1[, \operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ ,

on obtient le  $DL_{2.n+2}(0)$ , pour tout :  $n \in \mathbb{N}$ , en primitivant de la même façon que pour  $\operatorname{Arctan}$ .

- Enfin, pour :  $x \in ]-1, +1[, u = -x^2 \in ]-1, +1]$ , et donc :  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+u)^{-\frac{1}{2}}$ .

Pour :  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , on peut appliquer ce qui a été obtenu précédemment.

$$\text{Puis : } \forall n \geq 1, \alpha.(\alpha - 1).(\alpha - n + 1) = (-1)^n \cdot \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2^n} = \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{1.2.3 \dots (2n)}{2.4 \dots (2n)} = (-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2},$$

$$\text{et donc : } \forall x \in ]-1, +1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+u)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \cdot u^k + o(u^n) = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \cdot x^{2k} + o(x^{2n+1}),$$

car la fonction est impaire.

Il suffit pour terminer de primitiver ce  $DL_{2n+1}(0)$  en utilisant le fait que la constante d'intégration est nulle, pour obtenir le  $DL_{2n+2}(0)$  de Arcsin, pour tout :  $n \in \mathbb{N}$ .

### **Théorème 7.2 : fonctions tangente, tangente hyperbolique**

La fonction tangente admet un  $DL(0)$  à tout ordre, et en particulier :

$$\forall x \in ]-\pi/2, +\pi/2[, \tan(x) = x + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{2}{15} \cdot x^5 + \frac{17}{315} \cdot x^7 + o(x^7).$$

De même, la fonction tangente hyperbolique admet un  $DL(0)$  à tout ordre et en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}(x) = x - \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{2}{15} \cdot x^5 - \frac{17}{315} \cdot x^7 + o(x^7).$$

*Démonstration :*

$$\text{On commence par écrire : } \forall x \in ]-\pi/2, +\pi/2[, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7)}.$$

On pose alors :  $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^7)$ , qui tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

$$\text{Puis : } \forall x \in ]-\pi/2, +\pi/2[, \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{24} \cdot x^4 + \frac{61}{720} \cdot x^6 + o(x^7), \text{ et :}$$

$$\forall x \in ]-\pi/2, +\pi/2[, \tan(x) = \sin(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} = x + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{2}{15} \cdot x^5 + \frac{17}{315} \cdot x^7 + o(x^8), \text{ en effectuant le produit des}$$

deux  $DL_7(0)$  et en utilisant le fait que la fonction est impaire.

Pour la fonction th, on utilise le même raisonnement, et les calculs sont similaires.

### **Exemple détaillé :**

La fonction :  $x \mapsto \cos(x + x^2)$ , admet un  $DL_4(0)$ , qui vaut :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + x^2) = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - x^3 - \frac{11}{24} \cdot x^4 + o(x^4).$$

*Démonstration :*

La fonction étant de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , elle admet un  $DL(0)$  à tout ordre, et en particulier un  $DL_4(0)$ .

On peut poser sinon :  $\forall x \in \mathbb{R}, u = x + x^2$ , et  $u$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

$$\text{Alors : } \cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o(u^4).$$

Puis :

- $u^2 = x^2 + 2 \cdot x^3 + x^4$ ,

- $u^4 = x^4 + x^4 \cdot P(x)$ , où  $P$  est un polynôme en  $x$  de terme constant nul.

Donc  $P(x)$  est une fonction qui tend vers 0 en 0 et donc :  $u^4 = x^4 + x^4 \cdot \varepsilon(x) = x^4 + o(x^4)$ ,

- $o(u^4) = u^4 \cdot \varepsilon_1(u) = [x^4 + x^4 \cdot \varepsilon(x)] \cdot \varepsilon_1(u) = x^4 \cdot [1 + \varepsilon(x)] \cdot \varepsilon_1(u) = o(x^4)$ , puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \varepsilon(x)] \cdot \varepsilon_1(u) = 0$ , étant

donné que lorsque  $x$  tend vers 0,  $u$  tend aussi vers 0 ainsi que  $\varepsilon_1$ .

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + x^2) = 1 - \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2 \cdot x^3 + x^4) + \frac{1}{24} \cdot x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - x^3 - \frac{11}{24} \cdot x^4 + o(x^4).$$

## **8. Suites de réels ou de complexes, résultats généraux.**

**Définition 8.1 : suite de réels ou de complexes**

Une suite de réels ou de complexes est la donnée d'une application de  $\mathbb{N}$  (ou d'un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  de type  $\{n_0, n_0+1, \dots\}$ ) dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Elle se note en général  $(u_n)$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou  $(u_n)_{n \geq n_0}$ .

**Définition 8.2 : suite convergente, divergente**

Une suite  $(u_n)$  de réels ou de complexes est dite convergente si et seulement si :

$$\exists L \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}), \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - L| \leq \varepsilon.$$

Une suite est dite divergente lorsqu'elle n'est pas convergente.

**Remarque :**

Les deux suites  $((-1)^n)$  et  $(n)$  sont toutes deux divergentes, la première est sans limite, la seconde sans limite finie, mais même si on utilise l'expression « elle tend vers  $+\infty$  », cette « limite » est infinie et la suite est malgré tout dite divergente.

Une expression plus correcte est «  $(n)$  diverge vers  $+\infty$  ».

**Définition 8.3 : suite bornée**

Une suite  $(u_n)$  de réels ou de complexes est dite bornée si et seulement si :  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ .

**Théorème 8.1 : une suite convergente est bornée**

Si une suite réelle ou complexe converge, elle est bornée.

**Démonstration :**

Soit donc  $(u_n)$  une suite réelle ou complexe qui converge vers  $L$ .

Alors, pour :  $\varepsilon = 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - L| \leq \varepsilon = 1$ .

Et donc, si on pose :  $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|, |L|+1)$ , on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ .

**Théorème 8.2 : combinaison linéaire, produit et quotient de suites convergentes**

Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites réelles ou complexes convergeant vers  $a$  et  $b$  et  $\alpha$  et  $\beta$  des scalaires réels ou complexes.

Alors la suite  $[\alpha.(a_n) + \beta.(b_n)]$  converge vers  $[\alpha.a + \beta.b]$ .

De même la suite  $(a_n.b_n)$  converge vers  $[a.b]$ .

Si de plus la limite  $b$  est non nulle, alors  $(b_n)$  est à termes non nuls à partir d'un certain rang et la suite

$$\left( \frac{a_n}{b_n} \right) \text{ tend vers } \frac{a}{b}.$$

**Démonstration :**

- On a :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2.(|\alpha|+1)}$ , et :  $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2.(|\beta|+1)}$ .

D'où :  $\forall n \geq n_0 = \max(n_1, n_2), |[\alpha.a_n + \beta.b_n] - [\alpha.a + \beta.b]| \leq |\alpha|.|a_n - a| + |\beta|.|b_n - b| \leq \varepsilon$ .

La suite  $[\alpha.(a_n) + \beta.(b_n)]$  converge bien vers  $[\alpha.a + \beta.b]$ .

- Pour la suite produit  $(a_n.b_n)$ , on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n.b_n - a.b| \leq |a_n|.|b_n - b| + |b|.|a_n - a|$ .

La suite  $(a_n)$  étant convergente, elle est bornée par  $M$ , et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n.b_n - a.b| \leq M.|b_n - b| + |b|.|a_n - a|.$$

En adaptant la démonstration du 1, il est alors facile de voir que  $(a_n.b_n)$  converge vers  $(a.b)$ .

- Si maintenant  $(b_n)$  converge vers  $b$  non nul, alors, pour :  $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |b_n - b| \leq \varepsilon$ .

Donc :  $\forall n \geq n_0, |b| \leq |b - b_n| + |b_n|$ , donc :  $|b_n| \geq |b| - |b - b_n| \geq |b| - \varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ , et les termes de la suite

$(b_n)$  sont non nuls au moins à partir du rang  $n_0$ .

$$\text{Puis : } \forall n \geq n_0, \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n.b|} \leq \frac{2}{b^2} . |b_n - b|.$$

Là encore en adaptant la démonstration du 1, on en déduit que  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  converge vers  $\frac{1}{b}$ .

• Enfin :  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right)$ , et comme produit, elle converge vers  $\frac{a}{b}$ .

### **Théorème 8.3 : condition nécessaire de convergence**

Pour qu'une suite réelle ou complexe  $(u_n)$  converge, il est nécessaire que  $(u_{n+1} - u_n)$  tende vers 0.

*Démonstration :*

Si  $(u_n)$  converge vers L, la suite  $(u_{n+1})$  converge aussi vers L.

En effet :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - L| \leq \varepsilon$ , et :  $\forall n \geq n_0, |u_{n+1} - L| \leq \varepsilon$ .

Donc  $(u_{n+1} - u_n)$  converge vers :  $[L - L] = 0$ .

## **9. Suites de réels.**

### **Définition 9.1 : suite de réels croissante, décroissante, monotone**

On dit que la suite réelle  $(u_n)$  est croissante (resp. décroissante, strictement croissante, strictement décroissante) si et seulement si :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$  (resp.  $u_{n+1} - u_n \leq 0, u_{n+1} - u_n > 0, u_{n+1} - u_n < 0$ ).

Une suite réelle est dite monotone (resp. strictement monotone) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

### **Définition 9.2 : suite de réels majorée, minorée**

Une suite  $(u_n)$  de réels est dite majorée (resp. minorée) si et seulement si :

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$  (resp.  $M \leq u_n$ ).

### **Théorème 9.1 : équivalence entre suite bornée et suite majorée et minorée**

Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

*Démonstration :*

Si  $(u_n)$  est une suite réelle bornée par M alors tous les termes de la suite sont encadrés par  $-M$  et  $+M$ .

De même, si :  $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq u_n \leq b$ , alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M = \max(|a|, |b|)$ .

### **Définition 9.3 : suite réelle divergeant vers $+\infty$**

On dit que la suite réelle  $(a_n)$  diverge vers  $+\infty$  si et seulement si :  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n \geq A$ .

### **Théorème 9.2 : convergence des suites réelles monotones bornées**

Une suite réelle croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge vers la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de la suite.

Une suite réelle croissante non majorée tend vers  $+\infty$  et une suite réelle décroissante non minorée tend vers  $-\infty$ .

*Démonstration :*

• Soit  $(u_n)$  une suite de réels croissante majorée par M.

Alors l'ensemble :  $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble de réels non vide et majoré, qui admet une borne supérieure que l'on peut noter L.

Soit :  $\varepsilon > 0$ . Comme L est la borne supérieure de E,  $[L - \varepsilon]$  est donc un réel strictement inférieur à L et n'est pas un majorant de E.

Il existe donc un entier  $n_0$  tel que :  $L - \varepsilon < u_{n_0}$ .

Or la suite est croissante, donc :  $\forall n \geq n_0, L - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq u_n \leq L$ , soit :  $|u_n - L| \leq \varepsilon$ .

La suite  $(u_n)$  tend bien vers L.

La démonstration s'adapte immédiatement pour une suite réelle décroissante minorée.

• Si maintenant  $(u_n)$  est une suite réelle croissante, non majorée, alors :

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, A < u_{n_0}$ , puisque la suite est non majorée, et étant croissante, on a alors :

$\forall n \geq n_0, A < u_{n_0} \leq u_n$ , ce qui prouve bien que la suite tend vers  $+\infty$ .

La démonstration s'adapte si la suite est décroissante et non minorée.

#### **Définition 9.4 : suites adjacentes**

Deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de réels sont dites adjacentes si et seulement si :

- l'une est croissante,
- l'autre est décroissante,
- la suite  $(a_n - b_n)$  tend vers 0.

#### **Théorème 9.3 : convergence des suites adjacentes**

Deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de réels adjacentes convergent vers la même limite  $L$ .

Si  $(a_n)$  est croissante et  $(b_n)$  décroissante, alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq a_n \leq L \leq b_n \leq b_0$ .

*Démonstration :*

Supposons que  $(a_n)$  est croissante et  $(b_n)$  décroissante.

S'il existait un rang  $N$  pour lequel on ait :  $a_N > b_N$ , du fait de la monotonie des suites, on en déduirait :

$$\forall n \geq N, a_n \geq a_N > b_N \geq b_n, \text{ d'où : } a_n - b_n \geq [a_N - b_N] = \varepsilon > 0.$$

La suite  $(a_n - b_n)$  ne pourrait donc pas tendre vers 0.

Donc on en déduit que :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$ .

La suite  $(a_n)$  est donc croissante et majorée par tous les termes de la suite  $(b_n)$  : elle est donc convergente et sa limite  $L$  comme borne supérieure est donc inférieure aussi à tous les termes de  $(b_n)$ .

De même,  $(b_n)$  converge vers  $L'$ , supérieure à tous les termes de la suite  $(a_n)$ .

Or  $(a_n - b_n)$  tend vers 0 mais aussi vers  $[L - L']$ , donc :  $L = L'$ .

Enfin :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq a_n \leq L = L' \leq b_n \leq b_0$ .

#### **Théorème 9.4 : dit « des gendarmes »**

Soient trois suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(u_n)$  de réels telles que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq u_n \leq b_n$ ,
- $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers la même limite  $L$ ,  
alors  $(u_n)$  converge vers  $L$ .

*Démonstration :*

La suite  $(a_n - b_n)$  converge vers :  $[L - L] = 0$ .

De plus :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - a_n \leq b_n - a_n$ , d'où :  $|u_n - a_n| \leq |b_n - a_n|$ , puis :  $|u_n - L| \leq |u_n - a_n| + |a_n - L|$ .

Donc :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |b_n - a_n - 0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , et :  $|a_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , et donc :  $|u_n - L| \leq \varepsilon$ .

#### **Théorème 9.5 : signe de suites équivalentes en $+\infty$**

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont des suites réelles équivalentes en  $+\infty$ , alors  $u_n$  et  $v_n$  ont même signe à partir d'un certain rang.

*Démonstration :*

On a donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n \cdot (1 + \varepsilon(n))$ , avec :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$ .

Donc, pour :  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |\varepsilon(n)| \leq \frac{1}{2}$ , et :  $\frac{1}{2} \leq (1 + \varepsilon(n))$ .

Les termes  $u_n$  et  $v_n$  sont donc de même signe au moins à partir du rang  $n_0$ .

## **10. Suites de complexes.**

#### **Théorème 10.1 : équivalence de convergence entre la convergence d'une suite et celle de ses parties réelle et imaginaire**

Soit  $(z_n)$  une suite de complexes, telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = a_n + i \cdot b_n$ , avec :  $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ .

Alors  $(z_n)$  converge vers :  $L = a + i \cdot b$ , si et seulement si  $(a_n)$  converge vers  $a$  et  $(b_n)$  converge vers  $b$ .

*Démonstration :*

Supposons que  $(z_n)$  converge vers  $L$ .

Alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |a_n - a| \leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = |z_n - L|$ , de même :  $0 \leq |b_n - b| \leq |z_n - L|$ .

Le théorème des gendarmes montre alors que  $(a_n)$  tend vers  $a$ , et  $(b_n)$  vers  $b$ .

Réciproquement, si  $(a_n)$  tend vers  $a$  et  $(b_n)$  vers  $b$ , on utilise par exemple le fait que :

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |z_n - L| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \leq |a_n - a| + |b_n - b|$ , (il suffit d'élever au carré), pour en déduire, toujours avec le théorème des gendarmes, que  $(z_n)$  tend vers  $L$ .

### **Théorème 10.2 : cas d'une suite convergeant vers 0**

Soit  $(z_n)$  une suite complexe telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n = |z_n|$ .  
Alors  $(z_n)$  converge vers 0 si et seulement si  $(\rho_n)$  converge vers 0.

*Démonstration :*

Il suffit de remarquer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |\rho_n - 0| = |\rho_n| = \rho_n = |z_n| = |z_n - 0|$ , pour en déduire immédiatement l'équivalence.

### **Théorème 10.3 : utilisation des suites module et argument d'une suite complexe**

Soit  $(z_n)$  une suite complexe telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, z_n \neq 0$ , et :  $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \rho_n \cdot e^{i\theta_n}$ , où :  $\rho_n \in \mathbb{R}^{+*}, \theta_n \in \mathbb{R}$ .  
Si  $(z_n)$  converge vers  $L$ ,  $(\rho_n)$  converge vers  $|L|$ ,  
Si  $(\rho_n)$  et  $(\theta_n)$  convergent,  $(z_n)$  converge.

*Démonstration :*

- Une conséquence de l'inégalité triangulaire donne :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |\rho_n - L| = ||z_n| - |L|| \leq |z_n - L|$ .  
Donc à nouveau le théorème des gendarmes montre que si  $(z_n)$  tend vers  $L$ ,  $(\rho_n)$  tend vers  $|L|$ .
- On commence par écrire :  $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \rho_n \cdot \cos(\theta_n) + i \cdot \rho_n \cdot \sin(\theta_n)$ .  
Si on suppose de plus que  $(\rho_n)$  tend vers  $\rho$  et  $(\theta_n)$  vers  $\theta$ , on utilise alors la continuité des fonctions sinus et cosinus sur  $\mathbb{R}$  pour obtenir que  $(\cos(\theta_n))$  tend vers  $\cos(\theta)$ ,  $(\sin(\theta_n))$  tend vers  $\sin(\theta)$  et en utilisant des produits de suites convergentes ainsi que partie réelle et partie imaginaire, on en déduit bien que  $(z_n)$  converge vers  $[\rho \cdot \cos(\theta) + i \cdot \rho \cdot \sin(\theta)]$ .

## **11. Suites de réels ou de complexes : suites extraites.**

### **Définition 11.1 : suite extraite**

Soit  $(u_n)$  une suite de réels ou de complexes,  
On appelle suite extraite de  $(u_n)$  toute suite  $(v_n)$  telle qu'il existe  $\varphi$  strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$ .

### **Théorème 11.1 : convergence des suites extraites d'une suite convergente**

Si une suite  $(u_n)$  de réels ou de complexes converge, toute suite extraite de  $(u_n)$  converge vers la même limite.  
Si d'une suite réelle ou complexe on peut extraire deux suites convergeant vers des limites différentes, la suite diverge.

*Démonstration :*

Soit  $(u_n)$  une suite réelle ou complexe, convergeant vers  $L$ .  
Soit :  $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ , une suite extraite de  $(u_n)$ .  
Alors comme  $\varphi$  est strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , on montre facilement par récurrence que :  
 $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$ .  
Puis :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - L| \leq \varepsilon$ .  
Donc :  $\forall n \geq n_0, \varphi(n) \geq n \geq n_0$ , et :  $|v_n - L| = |u_{\varphi(n)} - L| \leq \varepsilon$ .  
La suite  $(v_n)$  converge bien vers  $L$ .  
Quant à la deuxième proposition, c'est la contraposée de la première.

### **Théorème 11.2 : cas des suites des termes d'ordres pair et impair**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle ou complexe.  
Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers la même limite  $L$ , alors  $(u_n)$  converge aussi vers  $L$ .

*Démonstration :*

On sait que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_{2n} - L| \leq \varepsilon$ , et :  $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |u_{2n+1} - L| \leq \varepsilon$ .  
Donc :  $\exists n_0 = \max(2 \cdot n_1, 2 \cdot n_2 + 1) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - L| \leq \varepsilon$ ,  
et la suite  $(u_n)$  converge donc bien vers  $L$ .

### **Théorème 11.3 : Bolzano-Weierstrass**

De toute suite bornée de réels ou de complexes, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration :

- Cas d'une suite réelle.

Soit  $(u_n)$  une suite réelle dont tous les termes sont compris entre  $a$  et  $b$ , avec :  $a < b$ .

On construit alors par récurrence trois suites de la façon suivante :

- $a_0 = a, b_0 = b, v_0 = u_0$ .

- en supposant construits :  $a_0 \leq \dots \leq a_N, b_N \leq \dots \leq b_0, v_0, \dots, v_N$ , tels que :

$\forall 0 \leq i \leq N, a_i < b_i$ , et le segment  $[a_i, b_i]$  contient une infinité de termes de la suite  $(u_n)$ ,

$$\forall 0 \leq i < N, b_{i+1} - a_{i+1} = \frac{b_i - a_i}{2},$$

$\forall 0 \leq i \leq N, v_i = u_{\varphi(i)} \in [a_i, b_i]$ , où  $\varphi$  est strictement croissante sur  $[0..N]$ ,

on pose :  $c = \frac{a_N + b_N}{2}$ .

L'un au moins des deux segments  $[a_N, c]$  et  $[c, b_N]$  contient une infinité d'éléments de la suite initiale.

On retient alors ce segment particulier (si les deux sont dans ce cas, on retient  $[a_N, c]$ ) et on pose  $a_{N+1}$  sa borne inférieure,  $b_{N+1}$  sa borne supérieure.

On a bien :  $a_N \leq a_{N+1} < b_{N+1} \leq b_N, b_{N+1} - a_{N+1} = \frac{b_N - a_N}{2}$ , et  $[a_{N+1}, b_{N+1}]$  contient une infinité de termes de la suite  $(u_n)$ .

Donc  $\{k > \varphi(N), u_k \in [a_{N+1}, b_{N+1}]\}$  est un ensemble non vide d'entiers naturels, il admet un plus petit élément que l'on note  $\varphi(N+1)$ , qui vérifie en particulier :  $\varphi(N+1) > \varphi(N)$ .

On peut alors poser :  $v_{N+1} = u_{\varphi(N+1)}$ .

Ainsi, on vient de construire par récurrence une suite  $(v_n)$ , extraite de  $(u_n)$  telle que de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq v_n \leq b_n.$$

Or les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes et convergent vers une même limite  $\alpha$ , et donc le théorème des gendarmes montre que  $(v_n)$  converge aussi vers  $\alpha$ .

- Cas d'une suite complexe.

Soit maintenant  $(z_n)$  une suite complexe bornée,  $(a_n)$  et  $(b_n)$  ses suites de parties réelle et imaginaire.

Puisque  $(a_n)$  est bornée, on peut en extraire une suite  $(a_{\varphi(n)})$  convergente vers  $\alpha$ .

La suite  $(b_{\varphi(n)})$  est alors bornée et on peut à nouveau en extraire une suite convergente  $(b_{\psi(n)})$  vers  $\beta$ .

Mais la suite  $(a_{\psi(n)})$  étant extraite d'une suite convergente, elle converge vers la même limite  $\alpha$ .

Finalement,  $(z_{\varphi(\psi(n))})$  est extraite de  $(z_n)$  et converge vers  $[\alpha + i.\beta]$ .

## 12. Suites récurrentes réelles de type : $u_{n+1} = f(u_n)$ .

### Définition 12.1 : suite récurrente et fonction itératrice

Soit  $f$  une fonction d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans lui-même.

On appelle suite récurrente construite à partir de  $f$  une suite réelle  $(u_n)$  telle que :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

La fonction  $f$ , définie de  $I$  dans  $I$ , qui établit le lien entre  $u_n$  et  $u_{n+1}$  est dite fonction itératrice de la suite.

### Théorème 12.1 : limites possibles d'une suite récurrente si la fonction itératrice est continue

Pour une suite récurrente réelle de fonction itératrice  $f$  définie de  $I$  dans  $I$ , si la fonction  $f$  est **continue** sur  $I$ , alors les seules limites possibles de la suite sont les points fixes de  $f$  dans  $I$ , c'est-à-dire les valeurs  $L$  de  $I$  telles que :  $f(L) = L$ , et **si l'intervalle  $I$  est ouvert**, les bornes réelles de cet intervalle.

Démonstration :

Puisque :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ , que  $I$  soit du type  $]a, b[$ ,  $[a, b[$ ,  $]a, b]$  ou  $[a, b]$ , on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq u_n \leq b$ .

Donc si  $(u_n)$  converge vers  $L$ , alors :  $a \leq L \leq b$ .

Donc soit :  $L = a$ , ou :  $L = b$ , et sinon :  $L \in ]a, b[ \subset I$ .

Or la fonction  $f$  est supposée continue sur  $I$ , donc elle l'est en  $L$  si on est dans le dernier cas.

Puisque  $(u_n)$  tend vers  $L$ ,  $(u_{n+1}) = (f(u_n))$  tend vers  $f(L)$ , et on a bien alors :  $f(L) = L$ .

### Théorème 12.2 : lien entre monotonie de la suite et croissante de la fonction itératrice

Pour une suite récurrente réelle, si la fonction  $f$  est **croissante** sur  $I$ , alors la suite  $(u_n)$  est **monotone**.

Démonstration :

Il est immédiat que :

$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n \leq u_{n+1}) \Rightarrow (u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2})$  et :  $(u_{n+1} \leq u_n) \Rightarrow (u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq f(u_n) = u_{n+1})$ .  
Le signe de  $(u_{n+1} - u_n)$  est donc constant et la suite est bien monotone.

***Théorème 12.3 : cas où la fonction itératrice est décroissante***

Pour une suite récurrente réelle, si la fonction  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors les suites extraites  $(u_{2.n})$  et  $(u_{2.n+1})$  sont monotones.

*Démonstration :*

Si  $f$  est décroissante de  $I$  dans  $I$ , alors  $f \circ f$  est croissante sur  $I$ .

Or :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2.(n+1)} = f \circ f(u_{2.n})$ , et :  $u_{2.(n+1)+1} = f \circ f(u_{2.n+1})$ , donc les suites  $(u_{2.n})$  et  $(u_{2.n+1})$  sont monotones.