Séries numériques.

Chap. 02 : cours complet.

1. Séries de réels et de complexes.

Définition 1.1 :	série de réels ou de complexes
Définition 1.2 :	série convergente ou divergente
Remarque :	influence des premiers termes d'une série sur la convergence
Théorème 1.1 :	condition nécessaire de convergence
Théorème 1.2 :	critère de divergence grossière
Théorème 1.3 :	série géométrique complexe
Définition 1.3 :	série télescopique
Théorème 1.4 :	convergence d'une série télescopique
Théorème 1.5 :	combinaison linéaire de séries convergentes
Théorème 1.6 :	équivalence de convergence en cas de produit par un scalaire non nul
Théorème 1.7 :	cas de trois séries liées par une somme
Théorème 1.8 :	lien entre convergence d'une série complexe et celle de ses parties réelle et imaginaire

2. Séries de réels positifs.

Théorème 2.1 :	premier critère de convergence pour les séries à termes réels positifs
Théorème 2.2 :	règle des majorants

3. Séries réelles de signe quelconque, séries complexes.

Définition 3.1 :	série réelle ou complexe absolument convergente
Théorème 3.1 :	lien entre convergence et absolue convergence
Définition 3.2 :	série semi-convergente
Théorème 3.2 :	règle des équivalents
Théorème 3.3 :	séries de Riemann
Théorème 3.4 :	règle des « grands O », des « petits o »
Théorème 3.5 :	règle des « n^{α} »
Théorème 3.6 :	règle de d'Alembert
Théorème 3.7 :	exponentielle complexe

4. Séries réelles alternées.

Définition 4.1 :	série alternée
Théorème 4.1 :	critère spécial des séries alternées

5. Compléments.

Théorème 5.1 :	*(hors programme)* séries de Bertrand
Définition 5.1 :	produit de Cauchy de deux séries
Théorème 5.2 :	convergence du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes
Théorème 5.3 :	constante d'Euler
Théorème 5.4 :	formule de Stirling

Séries numériques.

Chap. 02 : cours complet.

1. Séries de réels et de complexes.

Définition 1.1 : série de réels ou de complexes

Soit (u_n) une suite de réels ou de complexes.

On appelle série de terme général u_n, la suite (S_N) définie par : $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.

La suite (S_n) est aussi appelée suite des sommes partielles de la série.

On la note encore $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Définition 1.2 : série convergente ou divergente

Soit (u_n) une suite de réels ou de complexes.

On dit que la série de terme général u_n converge, si et seulement si la suite (S_n) est convergente.

Sa limite se note alors : $S = \lim_{N\to+\infty} S_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, et est appelée « somme de la série ».

Si une série n'est pas convergente, on dit qu'elle diverge.

En cas de convergence, on appelle reste d'ordre N de la série la quantité : $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$, et la suite (S_N) tend vers 0.

Remarque :

Les premiers termes n'interviennent pas pour la convergence d'une série.
Tous les critères de convergence restent donc valables si les conditions demandées sont remplies « à partir d'un certain rang ».
En cas de convergence, la valeur des premiers termes en revanche influe sur la somme de la série.

Théorème 1.1 : condition nécessaire de convergence

Si la série réelle ou complexe $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0 à l'infini.

Démonstration :

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (S_N) de ses sommes partielles par définition converge, donc la suite $(S_N - S_{N-1})_{N\geq 1}$ tend vers 0.
Or : $\forall N \geq 1$, $S_N - S_{N-1} = u_N$, et la suite (u_n) tend vers 0.

Théorème 1.2 : critère de divergence grossière

Si la suite réelle ou complexe (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration :

C'est la contraposée de l'implication précédente.

Théorème 1.3 : série géométrique complexe

Soit : $z \in \mathbb{C}$.

Alors $\sum z^n$ converge si et seulement si : $|z| < 1$, et dans ce cas, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Démonstration :

Pour : $z = 1$, la série géométrique diverge, puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Pour : $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, on a : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$, et cette suite converge si et seulement si : $|z| < 1$.

De plus, dans ce cas, la somme de la série vaut : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$.

Définition 1.3 : série télescopique

Une série réelle ou complexe $\sum u_n$ est dite télescopique lorsque son terme général peut se mettre sous la forme : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $u_n = a_{n+1} - a_n$, où (a_n) est une suite de réels ou de complexes.

Théorème 1.4 : convergence d'une série télescopique

Une série télescopique réelle ou complexe $\sum u_n$, avec : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $u_n = a_{n+1} - a_n$, converge si et seulement si (a_n) est une suite convergente.

Dans ce cas, on a : $(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n) - a_0 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration :

Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Alors : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $S_n = a_{n+1} - a_0$, et l'équivalence ainsi que la valeur de la limite en découle.

Théorème 1.5 : combinaison linéaire de séries convergentes

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries réelles ou complexes convergentes, et : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$.

On pose : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $w_n = \alpha.u_n + \beta.v_n$.

Alors $\sum w_n$ est une série convergente et on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \alpha.\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta.\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration :

En notant (U_n), (V_n), (W_n) les suites de sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$, et $\sum w_n$, on a :

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $W_n = \alpha.U_n + \beta.V_n$, et le résultat se déduit du résultat identique sur les suites.

Théorème 1.6 : équivalence de convergence en cas de produit par un scalaire non nul

Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe, α un scalaire réel ou complexe non nul.

Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \alpha.u_n$, et dans ce cas : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha.u_n = \alpha.\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration :

- Si $\sum u_n$ converge alors $\sum \alpha.u_n$ aussi comme cas particulier du théorème précédent.
- Si $\sum \alpha.u_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi en la multipliant par $\frac{1}{\alpha}$.

Théorème 1.7 : cas de trois séries liées par une somme

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries réelles ou complexes, et : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n$.

Alors si deux des trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$, convergent, la troisième converge aussi.

Si l'une diverge, au moins l'une des deux autres diverge.

Démonstration :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum w_n$ aussi comme somme de deux séries convergentes.

Si $\sum u_n$ (par exemple) et $\sum w_n$ convergent, alors $\sum v_n$ aussi, comme différence.

La dernière affirmation est la contraposée de la précédente.

Théorème 1.8 : lien entre convergence d'une série complexe et celle de ses parties réelle et imaginaire

Soit $\sum z_n$ une série complexe, avec : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $z_n = a_n + i.b_n$, où : $(a_n,b_n) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $\sum z_n$ converge si et seulement si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et alors : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n + i.\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Démonstration :

En appelant (A_n), (B_n) et (Z_n) les suites de sommes partielles associées, on a :

$\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $Z_n = A_n + i.B_n$, et le résultat découle du même résultat sur les suites complexes.

2. Séries de réels positifs.

Définition 3.1 : série réelle ou complexe absolument convergente

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 2.1 : premier critère de convergence pour les séries à termes réels positifs

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

Elle converge, si et seulement si la suite (S_N) de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration :

La suite (S_N) est croissante puisque : $\forall$ N $\in \mathbb{N}$, $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$.
Donc la suite (S_N) converge si et seulement si elle est majorée.

Définition 3.2 : série semi-convergente

On dit qu'une série réelle ou complexe est semi-convergente lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.

Théorème 2.2 : règle des majorants

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs, telles que :

- $\sum u_n$ converge,
- $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq n_0$, $v_n \leq u_n$.

Alors $\sum v_n$ converge et : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration :

Notons : $\forall$ N $\geq n_0$, $U_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$, et : $V_N = \sum_{n=n_0}^{N} v_n$. On a alors : $\forall$ N $\geq n_0$, $V_N \leq U_N$.

Or la série (à termes positifs) $\sum u_n$ converge, donc la suite de ses sommes partielles (même en commençant à n_0) est majorée par un réel M, et : $\forall$ N $\geq n_0$, $V_N \leq$ M.
La suite (V_N) est alors croissante et majorée par M donc convergente.
En passant à la limite dans l'inégalité sur les sommes partielles, on en déduit la dernière inégalité.

3. Séries réelles de signe quelconque, séries complexes.

Théorème 3.1 : lien entre convergence et absolue convergence

Une série $\sum u_n$ réelle ou complexe absolument convergente est convergente. Pas de réciproque.

Dans ce cas, on a : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration :

- Cas d'une série réelle.

On peut poser : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_n = |u_n| - (|u_n| - u_n)$, et on a alors : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $0 \leq (|u_n| - u_n) \leq |u_n|$.
Donc la série $\sum (|u_n| - u_n)$ est convergente et comme différence de séries convergentes, $\sum u_n$ aussi.

De plus : $\forall$ N $\in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n|$, et en passant à la limite, on a bien : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

- Cas d'une série complexe.

On pose : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + i.b_n$, avec : $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$.
On constate alors que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |u_n|$, et : $|b_n| \leq |u_n|$.
Donc les séries réelles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, donc convergentes (ce qu'on vient juste de démontrer), et finalement $\sum u_n$ converge aussi.

En utilisant à nouveau l'inégalité triangulaire, on termine avec : $\forall$ N $\in$ ℕ, $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \le \sum_{n=0}^{N} |u_n|$, et en passant à la limite, on a toujours : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Théorème 3.2 : règle des équivalents

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles dont les termes de l'une gardent un signe constant à partir d'un certain rang et telles que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Alors : ($\sum u_n$ converge) $\Leftrightarrow$ ($\sum v_n$ converge).

Démonstration :

On sait donc que (u_n) et (v_n) ont des termes de même signe à partir d'un certain rang, et donc quitte à les changer en leur opposée, on peut supposer qu'elles restent positives à partir d'un certain rang.
On peut encore écrire : $\forall$ n $\in$ ℕ, $u_n = v_n.(1 + \varepsilon(n))$, avec : $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

Donc, pour : $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists$ $n_0 \in$ ℕ, $\forall$ n $\ge n_0$, $|\varepsilon(n)| \le \frac{1}{2}$, et : $\frac{1}{2} \le (1 + \varepsilon(n)) \le \frac{3}{2}$, puis : $\frac{1}{2}.u_n \le v_n \le \frac{3}{2}.u_n$.
Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit donc l'équivalence de convergence des deux séries.

Théorème 3.3 : séries de Riemann

Soit : $\alpha \in$ ℝ.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, avec converge, si et seulement si : $\alpha > 1$.

Démonstration :

Soit : $u_{n,\beta} = \frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}$, avec β réel.

La série $\sum u_{n,\beta}$ est télescopique de somme partielle : $\forall$ n $\in$ ℕ, $S_{n,\beta} = 1 - \frac{1}{(n+1)^\beta}$, et elle converge si et seulement si : $\beta \ge 0$.

De plus : $u_{n,\beta} = \frac{1}{n^\beta}.\left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta}\right] \underset{+\infty}{\sim} \frac{\beta}{n^{\beta+1}}$, pour : $\beta \ne 0$.

Soit maintenant : $\alpha \ne 1$. Alors : $\frac{1}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}.u_{n,\beta}$, où on pose : $\beta = \alpha - 1 \ne 0$.

Comme les séries considérées gardent un signe constant, on en déduit que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\sum u_{n,\beta}$ converge, soit : $\beta > 0$, ou encore : $\alpha > 1$.

Enfin, pour : $\alpha = 1$, on a, pour les sommes partielles : $\forall$ N $\ge$ 1, $S_{2.N} - S_N = \sum_{n=N+1}^{2.N} \frac{1}{n} \ge N.\frac{1}{2.N} = \frac{1}{2}$.
Donc la suite (S_N) ne peut converger puisque $(S_{2.N} - S_N)$ ne tend pas vers 0, et (S_N) tend vers $+\infty$.

Théorème 3.4 : règle des « grands O », des « petits o »

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries complexes telles $\sum v_n$ soit absolument convergente.

Si : $u_n = O(v_n)$ en $+\infty$, alors $\sum u_n$ est aussi absolument converge.

Si de même : $u_n = o(v_n)$ en $+\infty$, alors $\sum u_n$ est aussi absolument converge.

Démonstration :

• Dans le premier cas, on sait que : $\exists$ M $\in$ ℝ, $\forall$ n $\in$ ℕ, $|u_n| \le M.|v_n|$.

Donc par comparaison de séries à termes positifs, si $\sum |v_n|$ converge, $\sum |u_n|$ converge aussi.

• Dans le second cas, on sait que : $\forall$ n $\in$ ℕ, $u_n = v_n.\varepsilon_n$, où ε_n est une suite qui tend vers 0 en $+\infty$.
Donc : $\exists$ $n_0 \in$ ℕ, $\forall$ n $\geq n_0$, $|\varepsilon_n| \leq 1$, et : $|u_n| \leq |v_n|$, ce qui nous ramène au premier cas.

Théorème 3.5 : règle des « n^α »

Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe.

Si $(n^\alpha.u_n)$ tend vers 0, avec : $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

Démonstration :

Il suffit de remarquer que les hypothèses se réécrivent en : $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, en $+\infty$ et que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est absolument convergente.

Théorème 3.6 : règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe non nulle à partir d'un certain rang, telle que : $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = k$.

Si :
- k < 1, alors $\sum u_n$ converge absolument,
- k > 1, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement, (même si : k = $+\infty$)
- k = 1, on ne peut a priori rien dire.

Démonstration :

• Cas : $0 \leq k < 1$.
Soit : k < k' < 1, et posons : ε = k' – k > 0.

Alors : $\exists$ $n_0 \in$ ℕ, $\forall$ n $\geq n_0$, $\left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - k\right| \leq \varepsilon$, et : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \varepsilon + k = k'$, donc : $|u_{n+1}| \leq k'.|u_n|$.

Dans ce cas : $\forall$ n $\geq n_0$, $|u_n| \leq (k')^{n-n_0}.|u_{n_0}| = C.(k')^n$, et la série étant majorée à partir d'un certain rang, par une série géométrique convergente est absolument convergente.

• Cas : 1 < k (éventuellement infini).
Comme précédemment, soit : 1 < k' < k.
Alors, en adaptant la démonstration précédente : $\exists$ $n_0 \in$ ℕ, $\forall$ n $\geq n_0$, $|u_n| \geq (k')^{n-n_0}.|u_{n_0}|$, et le terme général de la série tend alors vers $+\infty$ donc la série diverge grossièrement.

Théorème 3.7 : exponentielle complexe

Soit : z $\in$ ℂ.

La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

On note alors : exp(z) = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, et cette fonction coïncide avec l'exponentielle réelle sur ℝ.

Démonstration :

Pour z nul, la série est évidemment convergente.
Pour : z $\in$ ℂ*, la série est absolument convergente en utilisant la règle de d'Alembert.

Soit maintenant x un réel, non nul (car dans le cas où : x = 0, l'égalité : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est immédiate).

Alors la formule de Taylor sur [0,x] (ou [x,0] si : x < 0) garantit que :

$\forall$ N $\in$ ℕ, $\exists$ $c_{x,N} \in$]0,x[(ou]x,0[), $e^x = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}.e^{c_{x,N}}$.

Or comme $c_{x,n}$ reste dans l'intervalle]0,x[(ou]x,0[), la quantité $e^{c_{x,N}}$ est majorée par un réel M indépendant de n (par exemple : M = max(1,e^x)).

Donc : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\left| e^x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| \le \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.M$, et : $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = e^x$, du fait des croissances comparées de $|x|^{N+1}$ et de $(N+1)!$, soit bien le résultat voulu.

4. Séries réelles alternées.

Définition 4.1 : série alternée

On dit que la série de réels $\sum u_n$ est alternée si et seulement si $((-1)^n.u_n)$ garde un signe constant.
De manière équivalente si et seulement si le signe de u_n change à chaque n.

Théorème 4.1 : critère spécial des séries alternées

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que :

- $(|u_n|)$ est une suite décroissante,
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Alors $\sum u_n$ converge et sa somme est du signe u_0.

De plus : $\forall N \in \mathbb{N}$, $|R_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \right| \le |u_{N+1}|$.

Démonstration :

Quitte à remplacer toute la suite (u_n) par $(-u_n)$, on peut supposer : $u_0 \ge 0$.
Dans ce cas tous les termes u_{2n} sont positifs et u_{2n+1} négatifs.
Appelons (S_N) la suite des sommes partielles associée à la série $\sum u_n$.
Les suites $(S_{2.N})$ et $(S_{2.N+1})$ sont adjacentes.
En effet : $\forall N \in \mathbb{N}$,
$S_{2.(N+1)} - S_{2.N} = u_{2.N+2} + u_{2.N+1} = |u_{2.N+2}| - |u_{2.N+1}| \le 0$, et :
$S_{2.(N+1)+1} - S_{2.N+1} = u_{2.N+3} + u_{2.N+2} = |u_{2.N+2}| - |u_{2.N+3}| \ge 0$,
Puis : $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_{2.N+1} - S_{2.N} = u_{2.N+1}$, suite qui tend bien vers 0, car extraite d'une suite qui tend vers 0.
Donc $(S_{2.N})$ et $(S_{2.N+1})$ convergent vers la même limite L, et finalement (S_N) aussi.
De plus : $\forall N \in \mathbb{N}$, $0 \le S_1 \le S_{2.N+1} \le L \le S_{2.N+2} \le S_{2n.N} \le S_0$.
Donc dans ce cas L est positif, soit du signe de u_0, et aurait été négatif si on avait supposé u_0 négatif.
Enfin : $\forall N \in \mathbb{N}$,
$|R_{2.N+1}| = L - S_{2.N+1} \le S_{2.N+2} - S_{2.N+1} = u_{2.N+2} = |u_{2.N+2}|$, et :
$|R_{2.N}| = S_{2.N} - L \le S_{2.N} - S_{2.N+1} = -u_{2.N+1} = |u_{2.N+1}|$.

5. Compléments.

Théorème 5.1 : (hors programme) séries de Bertrand

Soit : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha.(\ln(n))^\beta}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$, ou : $(\alpha = 1, \beta > 1)$.

Démonstration :

- Cas : $\alpha > 1$.

Soit : $1 < \alpha' < \alpha$.

Alors : $\frac{1}{n^\alpha.(\ln(n))^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha'}}.\frac{1}{n^{\alpha-\alpha'}.(\ln(n))^\beta}$, et $n^{\alpha-\alpha'}.(\ln(n))^\beta$ tend vers $+\infty$, car : $\alpha - \alpha' > 0$.

Donc : $\frac{1}{n^\alpha.(\ln(n))^\beta} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right)$, en $+\infty$, ce qui garantit la convergence de la série de Bertrand dans ce cas.

- Cas : $\alpha = 1$, $\beta > 1$.

La série est à termes positifs donc elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Or : ∀ n ≥ 3, ∀ t ∈ [n – 1, n], $\frac{1}{n.(\ln(n))^{\beta}} \leq \frac{1}{t.(\ln(t))^{\beta}}$, et : $\frac{1}{n.(\ln(n))^{\beta}} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t.(\ln(t))^{\beta}}$.

Puis : ∀ N ≥ 3, $\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n.(\ln(n))^{\beta}} \leq \int_{2}^{N} \frac{dt}{t.(\ln(t))^{\beta}} = \left[-\frac{1}{\beta-1}.\frac{1}{(\ln(t))^{\beta-1}} \right]_2^N \leq \frac{1}{\beta-1}.\frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}}$.

La suite des sommes partielles étant majorée, la série de Bertrand est donc convergente.

• Cas : α = 1, β = 1.

De la même façon : ∀ n ≥ 2, ∀ t ∈ [n, n+1], $\frac{1}{t.(\ln(t))} \leq \frac{1}{n.(\ln(n))}$, et : $\int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t.(\ln(t))} \leq \frac{1}{n.(\ln(n))}$.

Puis : ∀ N ≥ 2, $\int_{2}^{N+1} \frac{dt}{t.(\ln(t))} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n.(\ln(n))}$, et la suite des sommes partielles tend vers +∞ donc la série de Bertrand diverge.

• Cas : α = 1, β < 1.

On minore alors en écrivant : ∀ n ≥ 2, $\frac{1}{n.(\ln(n))} \leq \frac{1}{n.(\ln(n))^{\beta}}$, et le terme général de la série est minoré par le terme général d'une série positive divergente, donc la série de Bertrand diverge.

• Cas : α < 1.

Puisque : ∀ n ≥ 2, $\frac{1}{n^{\alpha}.(\ln(n))^{\beta}} = \frac{1}{n}.\frac{n^{1-\alpha}}{(\ln(n))^{\beta}}$, et que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln(n))^{\beta}} = +\infty$, le terme général est là encore minoré à partir d'un certain rang par le terme général $\frac{1}{n}$ d'une série positive divergente, et la série de Bertrand diverge.

Définition 5.1 : produit de Cauchy de deux séries

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles ou complexes.

On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série $\sum w_n$ définie par :

∀ n ∈ ℕ, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p.v_q$.

Théorème 5.2 : convergence du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Le produit de Cauchy de deux séries réelles ou complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes est une série $\sum w_n$ absolument convergente et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Démonstration :

• Pour : N ∈ ℕ, $\sum_{n=0}^{N} |w_n| = \sum_{n=0}^{N} \left| \sum_{p+q=n} u_p.v_q \right| \leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{p+q=n} |u_p|.|v_q|$.

La dernière somme porte en fait sur tous les couples : (p,q) ∈ ℕ², avec : p + q ≤ N.
Or l'ensemble de ces couples est inclus dans {(p,q) ∈ ℕ², 0 ≤ p ≤ N, 0 ≤ q ≤ N}.
Comme de plus les termes que l'on ajoute en remplaçant le premier ensemble d'indices par le second sont tous positifs, on a donc :

∀ N ∈ ℕ, $\sum_{n=0}^{N} |w_n| \leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{p+q=n} |u_p|.|v_q| \leq \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} |u_p|.|v_q| = \left(\sum_{p=0}^{N} |u_p|\right).\left(\sum_{q=0}^{N} |v_q|\right) \leq \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_p|\right).\left(\sum_{q=0}^{+\infty} |v_q|\right)$.

La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum |w_n|$ étant majorée, la série $\sum |w_n|$ converge et $\sum w_n$ est absolument convergente.

• Puis : ∀ N ∈ ℕ, $\sum_{n=0}^{2.N} w_n = \sum_{n=0}^{2.N} \sum_{p+q=n} u_p.v_q$, et l'ensemble des couples concernés par cette dernière somme contient : E'$_N$ = {(p,q) ∈ ℕ², 0 ≤ p ≤ N, 0 ≤ q ≤ N}, donc est la réunion de E'$_N$ et d'un ensemble E$_N$''.

Donc : $\forall$ N $\in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{2.N} w_n = \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} u_p.v_q + \sum_{(p,q)\in E_N'} u_p.v_q = \left(\sum_{p=0}^{N} u_p\right).\left(\sum_{q=0}^{N} v_q\right) + \sum_{(p,q)\in E_N'} u_p.v_q$.

Enfin : $\forall$ (p,q) $\in$ E_N', p $\geq$ N+1, et : q $\geq$ N+1.

Donc : $\displaystyle\left|\sum_{(p,q)\in E_N'} u_p.v_q\right| \leq \sum_{(p,q)\in E_N'} |u_p|.|v_q| \leq \sum_{p=N+1}^{+\infty}\sum_{q=N+1}^{+\infty} |u_p|.|v_q| = \left(\sum_{p=N+1}^{+\infty} |u_p|\right).\left(\sum_{q=N+1}^{+\infty} |v_q|\right)$,

ces majorations étant justifiées par le fait que les séries majorantes sont toutes convergentes.
Or le produit qui apparaît à la fin est le produit de deux restes d'ordre n de séries convergentes, et donc ce produit tend vers 0 quand n tend vers +∞, et la valeur absolue de la somme majorée aussi.

Finalement : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{2.N} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right).\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{(p,q)\in E_N'} u_p.v_q$, d'où : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right).\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$.

Théorème 5.3 : constante d'Euler

La somme partielle H_N de la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}$ admet un développement asymptotique en +∞ qui s'écrit : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + o(1)$, en +∞, où γ vaut environ : $\gamma \approx 0.577$, et est appelée constante d'Euler.

Démonstration :

On pose : $\forall$ N $\geq$ 1, $u_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \ln(N)$, et : $v_N = u_{N+1} - u_N$.

Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq1} v_n$ est télescopique.

De plus : $v_N = \displaystyle\frac{1}{N+1} - \ln\left(1+\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N}.\left(1+\frac{1}{N}\right)^{-1} - \frac{1}{N} + \frac{1}{2.N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) = -\frac{1}{2.N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$.

La série $\displaystyle\sum_{N\geq1} v_N$ est alors absolument convergente et par conséquent la suite (u_N) converge.

Si on note cette limite γ, on peut alors écrire : $u_N = \gamma + \varepsilon(N)$, où ε est une suite qui tend vers 0 en +∞.
On en déduit bien le développement asymptotique de H_N annoncé.

Théorème 5.4 : formule de Stirling

En +∞, on a : $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n}$.

Démonstration :

Soit, pour : n $\in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\frac{n!.e^n}{n^n}.\frac{1}{\sqrt{n}}$, et : $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

La série $\sum v_n$ est télescopique et converge si et seulement la suite ($\ln(u_n)$) converge.

Or : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln\left(\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n.\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(e) - \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

On utilise alors un développement limité en $\displaystyle\frac{1}{n}$ à l'ordre 2 en +∞, et : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $v_n = \left(-\displaystyle\frac{1}{12}\right).\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

La série $\sum v_n$ est donc à termes négatifs à partir d'un certain rang et son terme général est équivalent en +∞ à celui d'une série de Riemann convergente (on peut aussi la voir comme la somme de deux séries convergentes ou absolument convergentes).
Donc $\sum v_n$ converge vers une limite L.
Par conséquent, ($\ln(u_n)$) converge vers [L + $\ln(u_1)$], et (u_n) converge vers un réel strictement positif K égal à l'exponentielle de la limite précédente, du fait de la continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} K$, puis : $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n.e^{-n}.\sqrt{n}.K$.
La valeur de K enfin, peut être obtenue en passant par les intégrales de Wallis.

On peut poser pour cela : $\forall$ n $\in$ ℕ, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t).dt$.

On montre que : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{\pi}{n}}$, puis que : $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}.n!^2}.\frac{\pi}{2}$.

On en déduit finalement : K = $\sqrt{2.\pi}$.