Intégration (corrigé des classiques).

Calculs d'intégrales sur un segment et de primitives.

29. a. Tout d'abord f est définie sur ℝ puisque son dénominateur ne peut s'annuler.

Puis on peut mettre f sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x-a-i.b} = \dfrac{x-a+i.b}{(x-a)^2+b^2}$, et sous cette forme les fonctions Re(f) et Im(f) sont clairement continues sur ℝ (par opérations).

Donc f admet des primitives sur ℝ, toutes égales entre elles à une constante additive près.

b. Ensuite ces primitives s'écrivent :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int \frac{x-a+i.b}{(x-a)^2+b^2}.dx = \frac{1}{2}.\int \frac{2.(x-a)}{(x-a)^2+b^2}.dx + i.Arc\tan\left(\frac{x-a}{b}\right), \text{ soit :}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}.\ln((x-a)^2+b^2) + i.Arc\tan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C = \ln|x-\lambda| + i.Arc\tan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C, \text{ avec : } C \in \mathbb{C}.$$

Propriétés de l'intégrale sur un segment.

30. f étant continue en 0 et : $0 \le a < 1$, on peut penser que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(a^n.t).dt = f(0)$.

Pour montrer ce résultat, on étudie : $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 f(a^n.t).dt - f(0)$.

Puisque f est continue en 0, on sait que : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall u \in [0,1], (|u - 0| \le \alpha) \Rightarrow (|f(u) - f(0)| \le \varepsilon)$.

De plus (a^n) tend vers 0, donc pour : $\alpha > 0$, donné, on sait que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \ge n_0) \Rightarrow (|a^n| \le \alpha)$.

Finalement, pour : $\varepsilon > 0$, donné, on peut trouver : $\alpha > 0$, et : $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que :

$\forall n \ge n_0, |a^n| \le \alpha$, et : $\forall t \in [0,1], |a^n.t| \le \alpha$, donc : $|f(a^n.t) - f(0)| \le \varepsilon$), d'où :

$$\forall n \ge n_0,\ \left|\int_0^1 f(a^n.t).dt - f(0)\right| = \left|\int_0^1 [f(a^n.t) - f(0)].dt\right| \le \int_0^1 |f(a^n.t) - f(0)|.dt \le \varepsilon.\int_0^1 dt = \varepsilon,$$

ce qui montre bien, en revenant à la définition d'une limite que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(a^n.t).dt = f(0)$.

31. • [⇒] La fonction proposée est réelle, et $\int_a^b f(t).dt$ est positive ou négative.

Quitte à changer f en –f, supposons cette intégrale positive.

On suppose donc que : $\int_a^b f(t).dt = \int_a^b |f(t)|.dt$, soit : $0 = \int_a^b [|f(t)| - f(t)].dt$.

La fonction qui apparaît sous l'intégrale est continue sur [a,b], positive.

Puisque son intégrale est nulle, c'est que cette fonction est nulle, c'est-à-dire : $\forall x \in [a,b], |f(x)| = f(x)$, et f est dans ce cas positive sur [a,b].

• [⇐] Quitte à changer f en –f, on peut cette fois supposer f positive.

Alors : $\int_a^b f(t).dt \ge 0$, donc : $\left|\int_a^b f(t).dt\right| = \int_a^b f(t).dt = \int_a^b |f(t)|.dt$.

32. La fonction f étant de classe C^1 sur [a,b], φ est de classe C^2 sur [a,b] par opérations et :

$$\forall x \in [a,b],\ \varphi'(x) = 2.f(x).\int_a^x f - (f(x))^3 = f(x).[2.\int_a^x f - (f(x))^2].$$

Si on note alors : $\forall x \in [a,b],\ \psi(x) = 2.\int_a^x f - (f(x))^2$, ψ est de classe C^1 sur [a,b], et :

$$\forall x \in [a,b],\ \psi'(x) = 2.f(x) - 2.f(x).f'(x) = 2.f(x).[1 - f'(x)].$$

Or :

- $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) \le 1$, donc : $[1 - f'(x)] \ge 0$,
- f est croissante sur [a,b] (puisque f' y est positive) et : f(a) = 0, donc f est positive sur [a,b].

Finalement, ψ' est positive sur l'intervalle [a,b], donc ψ y est croissante, et comme de plus : ψ(a) = 0, on en déduit que ψ est positive sur [a,b].

La fonction φ' est alors aussi positive sur [a,b], donc φ est croissante, et étant nulle en a, elle y reste positive : on en déduit le résultat voulu.

33. En notant φ la fonction proposée : $\forall$ t ∈ $\mathbb{R}^+$, $\varphi(t) = e^{-b.t}.\left(\int_0^t f + \frac{a}{b}\right)$, φ est définie, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ puisque f y est continue.

Alors : $\forall$ t ∈ $\mathbb{R}^+$, $\varphi'(t) = -b.e^{-b.t}.\left(\int_0^t f + \frac{a}{b}\right) + e^{-b.t}.f(t) = e^{-b.t}.[f(t) - b.\int_0^t f - a]$.

Donc φ' est négative sur [0,T] et φ est décroissante sur cet intervalle.

De plus : $\varphi(0) = \frac{a}{b}$, donc : $\forall$ t ∈ [0,T], $\varphi(t) \le \frac{a}{b}$, d'où : $\int_0^t f \le \frac{a}{b}.e^{b.t} - \frac{a}{b}$.

Si maintenant, on reporte dans l'inégalité que vérifie f par hypothèse, on en déduit que :

$\forall$ t ∈ [0,T], $f(t) \le a.e^{b.t}$.

Fonctions définies à l'aide d'intégrales.

34. • Notons f : t $\mapsto \frac{1}{\sqrt{t^3+t}}$, est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, où elle admet donc des primitives.

Si on appelle F l'une d'entre elles, alors : $\forall$ x > 0, φ(x) = F(2.x) – F(x) = $\int_x^{2.x} \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}}$.

φ est donc définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et y est de classe C^1, avec : $\forall$ x > 0, $\varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{8.x^3+2.x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}$.

Puis : (φ'(x) ≥ 0) ⇔ ($2.\sqrt{x^3+x} - \sqrt{8.x^3+2.x} \ge 0$) ⇔ ($4.x^3 + 4.x \ge 8.x^3 + 2.x$) ⇔ ($2.x.(2.x^2 - 1) \le 0$).

Donc φ est croissante sur $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$, décroissante sur $]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ et elle s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

φ étant de plus positive (intégrale d'une fonction positive), elle admet donc une limite finie en 0 et en +∞.

Enfin $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}}$ converge car f est positive, et : $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, sachant que $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}$ converge.

De même, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}}$ aussi car : $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$.

Donc F admet une limite finie en 0 et en +∞, d'où : $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} F(2.x) - \lim_{x\to 0} F(x) = 0$, ainsi qu'en +∞.

On pourrait pour terminer montrer que φ' tend vers +∞ en 0, donc que φ, même prolongée en 0, n'y est pas dérivable.

• Notons à nouveau f la fonction sous la deuxième intégrale, qui est définie, continue sur $\mathbb{R}^*$.
f admet des primitives sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$, et la fonction proposée (que l'on notera φ) est donc bien définie sur ces deux intervalles.

Puis : $\forall$ x ∈ $\mathbb{R}^*$, $\varphi(-x) = \int_{-x}^{-2.x} \frac{ch(t)}{t}.dt = \int_x^{2.x} \frac{ch(-u)}{u}.du = \varphi(x)$, (changement de variable : u = -t).

Puisque φ est paire, on va l'étudier sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Notons alors F la primitive de f qui s'annule en 1 : on peut écrire : $\forall$ x > 0, φ(x) = F(2.x) – F(x).

φ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, et : $\forall$ x > 0, $\varphi'(x) = 2.F'(2.x) - F'(x) = 2.f(2.x) - f(x) = \frac{ch(2.x) - ch(x)}{x}$.

Donc φ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, et puisqu'elle y reste positive, elle admet une limite finie en 0.

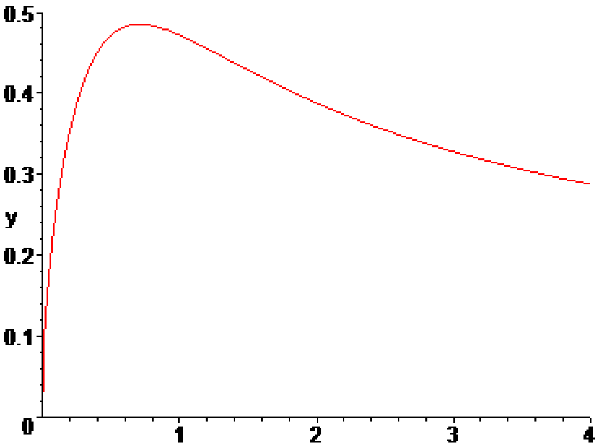
De plus : $\forall$ x > 0, $\forall$ t ∈ [x, 2.x], $\frac{ch(x)}{t} \le \frac{ch(t)}{t} \le \frac{ch(2.x)}{t}$, et en intégrant sur [x, 2.x] :

$ch(x).\ln(2) \le \varphi(x) \le ch(2.x).\ln(2)$.

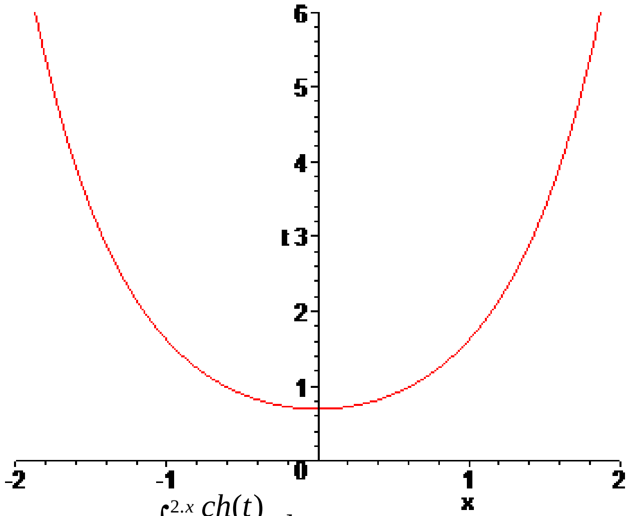
On en déduit avec le théorème des gendarmes que φ tend vers ln(2) en 0 (où elle est donc prolongeable par continuité) et vers +∞ en +∞.

De plus on constate aussi que $\frac{\varphi(x)}{x}$ tend aussi vers +∞ en +∞ et la courbe présente donc une branche parabolique en +∞ dans la direction Oy.

Enfin, puisque φ' tend vers 0 en 0 (avec un développement limité), le prolongement de φ (que l'on notera encore φ) est dérivable en 0 et : φ'(0) = 0.



$x \mapsto \int_x^{2.x} \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}}$



$x \mapsto \int_x^{2.x} \frac{ch(t)}{t}.dt$

Intégrales et zéros.

35. a. Supposons que f ne s'annule pas sur [0,π].

Quitte à changer f en –f, on peut alors la supposer strictement positive (du fait de la continuité).

Dans ce cas, la fonction φ : x ↦ sin(x).f(x), est continue sur [0,π], positive, et strictement positive en dehors de 0 et de π.

Donc son intégrale doit être nulle, ce qui n'est pas le cas.

Conclusion : ∃ a ∈ [0,π], f(x) = 0.

b. Supposons maintenant que f ne s'annule qu'en a.

Si f ne changeait pas de signe en a, elle resterait strictement positive en dehors de a, et à nouveau on ne pourrait pas avoir : $\int_0^{\pi} f(t).\sin(t).dt = 0$.

A nouveau, et quitte à changer f en –f, on peut supposer que f est positive sur [a,π], négative sur [0,a].

Mais alors la fonction ψ : x ↦ f(x).sin(x – a), est continue, et positive sur [0,π], et :

$$\int_0^{\pi} f(t).\sin(t-a).dt = \cos(a).\int_0^{\pi} f(t).\sin(t).dt - \sin(a).\int_0^{\pi} f(t).\cos(t).dt = 0.$$

La fonction ψ devrait donc être identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas puisque f ne l'est pas.

Conclusion : f s'annule en au moins une deuxième valeur entre 0 et π.

Convergence et calcul éventuel d'intégrales impropres.

36. • La première intégrale est convergente.

En effet la fonction sous l'intégrale est définie, continue et négative sur]0,π/2], et :

$$\sin(2.x).\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} 2.x\ln(\sin(x)) = 2.x.[\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \ln(x)] \xrightarrow[0]{} 0.$$

Donc cette fonction est prolongeable par continuité en 0 et l'intégrale converge.

Puis : ∀ x ∈]0,π/2], $F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(2.x).\ln(\sin(x)).dx = 2.\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(x).\ln(\sin(x)).\cos(x).dx = 2.\int_1^{\sin(x)} u.\ln(u).du$.

D'où : $F(x) = 2.\int_1^{\sin(x)} u.\ln(u).du = [u^2.\ln(u)]_1^{\sin(x)} - \int_1^{\sin(x)} u.du = \sin^2(x).\ln(\sin(x)) - \frac{\sin^2(x)}{2} + \frac{1}{2}$.

Enfin : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2.x).\ln(\sin(x)).dx = F(\frac{\pi}{2}) - \lim_{x\to 0} F(x) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

• La fonction dans la deuxième intégrale est définie, continue positive sur]a,b[.

Ensuite : $\frac{1}{\sqrt{(x-a).(b-x)}} \underset{a}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(b-a)}}.\frac{1}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}$, et : $\frac{1}{\sqrt{(x-a).(b-x)}} \underset{b}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(b-a)}}.\frac{1}{(b-x)^{\frac{1}{2}}}$.

Les fonctions considérées étant positives, on en déduit la convergence de cette intégrale deux fois généralisée.

De plus : ∀ x ∈]a,b[, $(x-a).(b-x) = -x^2 + (a+b).x - a.b = \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

donc : ∀ x ∈]a,b[, $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}}$, et on peut poser le changement

de variable : $x - \dfrac{a+b}{2} = \left(\dfrac{b-a}{2}\right).u$, soit : $F(x) = \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(u) + C = \arcsin\left(\frac{2.x-(a+b)}{b-a}\right) + C$.

Finalement : $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x) = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi$.

• Pour la dernière intégrale, la fonction sous l'intégrale est définie, continue, positive sur]0,1[.

De plus : $\dfrac{1}{x^{1/2}.\sqrt{1-x}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^{1/2}}$, et : $\dfrac{1}{x^{1/2}.\sqrt{1-x}} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, ce qui garantit la convergence de l'intégrale.

Puis : ∀ x ∈]0,1[, $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/2}.\sqrt{1-x}} = \int \frac{2.du}{\sqrt{1-u^2}} = 2.\arcsin(u) + C = 2.\arcsin(\sqrt{x}) + C$., avec : x = u^2.

D'où : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}.\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1} F(x) - \lim_{x\to 0} F(x) = \pi$.

37. • La première intégrale est divergente.

En effet, la fonction sous l'intégrale est définie, continue, positive sur]0,1[, mais : $\dfrac{1}{\sqrt{x^3.(1-x)}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, ce qui montre que l'intégrale diverge en 0, donc est divergente. Etudier si les intégrales suivantes sont convergentes, sans en calculer la valeur.

• La deuxième est convergente.

En effet, la fonction sous l'intégrale est définie, continue, positive sur [1,+∞) et l'intégrale est généralisée en sa borne haute.

De plus : ∀ x ≥ 1, $0 \le (1+\ln(x))^{-\ln(x)} = \exp(-\ln(x).\ln(1+\ln(x))) = \dfrac{1}{x^{\ln(1+(\ln(x))}}$.

Et comme : $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+\ln(x)) = +\infty$, on en déduit que : ∃ A ≥ 1, ∀ x ≥ A, ln(1+ln(x)) ≥ 2.

Dans ce cas : ∀ x ≥ A, $0 \le (1+\ln(x))^{-\ln(x)} \le \dfrac{1}{x^2}$, ce qui garantit la convergence de l'intégrale.

• La troisième intégrale est convergente.

La fonction sous l'intégrale est définie, continue et positive sur]0,+∞), et l'intégrale est généralisée en ses deux bornes.

De plus : ∀ x ≥ 1, $\left|\dfrac{1-\cos(x)}{x^{5/2}}\right| \le \dfrac{2}{x^{5/2}}$, ce qui montre que l'intégrale converge en sa borne infinie,

et un développement limité du cosinus donne : $\dfrac{1-\cos(x)}{x^{5/2}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, ce qui montre la convergence de l'intégrale en 0.

• La convergence de la quatrième intégrale dépend de a.

La fonction sous l'intégrale est toujours définie, continue sur]0,+∞) et l'intégrale est généralisée en ses deux bornes.

Sur]0,1], la fonction est négative et en l'écrivant : $x^a.\ln(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^{-a}}$, on distingue alors trois cas :

(- a < 1) ; pour : -a < γ < 1, on a : $\dfrac{\ln(x)}{x^{-a}} = [x^{a+\gamma}.\ln(x)].\dfrac{1}{x^\gamma} = o\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$, du fait que : a + γ > 0, et avec le

théorème des croissances comparées ; l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^a.\ln(x).dx$ est alors convergente.

(-a = 1) ; la fonction sous l'intégrale est alors : $\dfrac{\ln(x)}{x^{-a}} = \dfrac{\ln(x)}{x}$, qui admet $\dfrac{1}{2}.(\ln(x))^2$ pour primitive sur ℝ+*,

et cette primitive n'a pas de limite finie en 0 : l'intégrale $\int_0^1 x^a.\ln(x).dx$ est alors divergente.

(-a > 1) ; on constate que : ∀ x ∈]0,1[, $\dfrac{-\ln(x)}{x^{-a}} \geq \dfrac{-\ln(x)}{x} \geq 0$, et par comparaison de fonctions positives,

l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^a.\ln(x).dx$ est encore divergente.

Sur [1,+∞), la fonction sous l'intégrale est positive et se met sous la même forme que précédemment.
A nouveau on distingue trois cas :

(-a > 1) ; pour : 1 < γ < -a, on a : $\dfrac{\ln(x)}{x^{-a}} = \dfrac{\ln(x)}{x^{a+\gamma}}.\dfrac{1}{x^\gamma} = o\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$, du fait que : -a – γ > 0, et avec le théorème

des croissances comparées ; l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^a.\ln(x).dx$ est alors convergente.

(-a = 1) ; la même primitive qu'au-dessus montre que $\int_1^{+\infty} x^a.\ln(x).dx$ diverge.

(-a < 1) ; on a alors : ∀ x ∈ [1,+∞), $\dfrac{\ln(x)}{x^{-a}} \geq \dfrac{\ln(x)}{x} \geq 0$, et l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^a.\ln(x).dx$ est encore divergente.

Conclusion : cette intégrale est toujours divergente.
Remarque : en +∞, il suffisait d'étudier ce troisième cas, seule possibilité de convergence de l'intégrale, au vu de l'étude faite en 0.

38. Ici, on peut penser à calculer directement une primitive puisque la valeur des intégrales est demandée.
Néanmoins :

• La fonction sous la 1ère intégrale est définie, continue, positive sur [2,+∞), et : $\dfrac{x^2+2}{x.(x-1).(x^2+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$,

garantit que l'intégrale est convergente.

Puis on utilise une décomposition en éléments simples et : $\dfrac{x^2+2}{x.(x-1).(x^2+1)} = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{x-1}{x^2+1}$.

On en déduit que :

∀ x ≥ 2, $F(x) = \int \dfrac{x^2+2}{x.(x-1).(x^2+1)}.dx = -2.\ln(x) + \dfrac{3}{2}.\ln(x-1) + \dfrac{1}{4}.\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{2}.\arctan(x) + C$.

Finalement : $\int_2^{+\infty} \dfrac{x^2+2}{x.(x-1).(x^2+1)}.dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(2) = -\dfrac{\pi}{4} + 2.\ln(2) - \dfrac{1}{4}.\ln(5) + \dfrac{1}{2}.\arctan(2)$.

• Attention dans ce cas à distinguer la valeur : a = 1, pour laquelle la fonction est définie, continue de signe constant sur]0,1[.
Pour toutes les autres valeurs, la fonction est définie, continue de signe constant sur]0,1].

Dans tous les cas : $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}.\dfrac{1}{x-a} \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{a}.\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, ce qui garantit la convergence de l'intégrale (en 0).

Si : a = 1, l'intégrale est aussi généralisée en 1, et : $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}.\dfrac{1}{x-1} \underset{1}{\sim} -\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, d'où à nouveau la

convergence de l'intégrale, cette fois-ci en 1.

Puis : ∀ x ∈]0,1[, $F(x) = \int \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}.\dfrac{dx}{x-a} = \int \dfrac{2.u^2}{(u^2+1).((1-a)-a.u^2)}.du$, avec : $u = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

On écrit alors : $\dfrac{2.u^2}{(u^2+1).((1-a)-a.u^2)} = \dfrac{2}{u^2+1} - 2.(a-1).\dfrac{1}{a.u^2+(a-1)}$.

Puis : $F(x) = 2.\arctan(u) - 2.\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}.\arctan\left(u.\sqrt{\dfrac{a}{a-1}}\right) + C$.

On termine avec les limites de F quand x tend vers 0 et 1, soit quand u tend vers +∞ et 0 et :

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}.\frac{dx}{x-a} = 0-\left(1-\sqrt{\frac{a-1}{a}}\right).\pi = \left(\sqrt{\frac{a-1}{a}}-1\right).\pi .$$

- Pour cette dernière intégrale, la fonction sous l'intégrale est définie, continue positive sur [1,+∞), et : $\frac{1}{x.\sqrt[3]{x^2+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$, ce qui garantit la convergence de l'intégrale.

Puis : ∀ x ≥ 1, $F(x) = \int \frac{dx}{x.\sqrt[3]{x^2+1}} = \int \frac{du}{2.u.\sqrt[3]{u+1}} = \frac{1}{2}\int .\frac{3.v.dv}{v^3-1}$, en utilisant les changements de variable successifs : u = x^2, puis : $v = \sqrt{u+1}$.

On décompose alors la fraction en éléments simples et on intègre classiquement pour obtenir :

$$F(x) = \frac{1}{2}.\ln(v-1) - \frac{1}{4}.\ln(v^2+v+1) + \frac{\sqrt{3}}{2}.\arctan\left(\frac{2.v+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Quand x vaut 1, v vaut $\sqrt[3]{2}$, et quand x tend vers +∞, v tend vers +∞.

En calculant les valeurs ou limites de F en ces points on conclut avec :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt[3]{x^2+1}} = \frac{\pi.\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}.\ln(\sqrt[3]{2}-1) + \frac{1}{4}.\ln(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1) - \frac{\sqrt{3}}{2}.\arctan\left(\frac{2.\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Série numérique définie à l'aide d'une intégrale.

39. On pose, pour : n ∈ ℕ*, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$, et : $v_n = \ln(n^{1/3}.u_n)$.

a. Pour : n ≥ 1, l'intégrale définissant u_n est évidemment convergente avec un équivalent en +∞.

Puis si on effectue une intégration par parties, alors : $\int_0^A \frac{dt}{(1+t^3)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n}\right]_0^A + 3.n.\int_0^A \frac{t^3.dt}{(1+t^3)^{n+1}}$,

et en faisant tendre A vers +∞, on obtient : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} = 3.n.\int_0^{+\infty} \frac{t^3.dt}{(1+t^3)^{n+1}} = 3.n.\int_0^{+\infty} \frac{(t^3+1-1).dt}{(1+t^3)^{n+1}}$,

soit : $u_n = 3.n.(u_n - u_{n+1})$.

De plus, avec une décomposition en éléments simples : $u_1 = \frac{2.\pi}{3.\sqrt{3}}$

Donc : $u_{n+1} = \frac{3.n-1}{3.n}.u_n$, puis : ∀ n ≥ 2, $u_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{3.k-1}{3.k}\right).u_1 = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{3.k-1}{3.k}\right).\frac{2.\pi}{3.\sqrt{3}}$.

b. Classiquement : ∀ n ≥ 1, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{1}{3}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3.n}\right)$,

et avec un développement limité : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2.n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{3.n} - \frac{1}{18.n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{9.n^2}$.

La série proposée converge donc et (v_n) converge aussi vers une limite L.

Donc ($n^{\frac{1}{3}}.u_n$) tend vers e^L et : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{\frac{1}{3}}}$, donc la série $\sum u_n$ diverge, et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge.

Pour la dernière série, elle est alternée (les u_n sont positifs), la suite (u_n) décroît (question a) et tend vers 0 (question b), donc le critère spécial garantit sa convergence.

c. Pour la somme de la dernière série, on a :

∀ n ≥ 1, S_n $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}.u_k = -\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{1+t^3}\right)^k .dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+t^3}.\left[1-\left(\frac{-1}{1+t^3}\right)^n\right].dt$.

La partie indépendante de n est une intégrale convergente : montrons que l'autre partie tend vers 0.

Pour cela : ∀ n ≥ 1, $\left|\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+t^3}.\left(\frac{-1}{1+t^3}\right)^n .dt\right| = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+t^3}.\frac{1}{(1+t^3)^n}.dt \leq \frac{1}{2}u_n$, et l'expression tend bien vers

0 en $+\infty$.

Donc : $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.u_n = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2+t^3}.dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{2}}{2+2.u^3}.du = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}.u_1 = \frac{\pi.\sqrt[3]{2}}{3.\sqrt{3}}$.

Intégrabilité de fonctions de signe quelconque, à valeurs complexes.

40. Le problème d'intégrabilité de cette fonction est lié aux deux bornes de l'intervalle d'étude.

- en 0 : $\left|\sqrt{x}.f(x)\right| \le \frac{\pi}{2}.\sqrt{x}.|\ln(x)| \xrightarrow[0]{} 0$, ce qui garantit l'intégrabilité sur]0,1].
- en $+\infty$, on utilise la propriété : $\forall$ x > 0, $\frac{\pi}{2} - Arc\tan(x) = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)$, et : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Ces comparaisons entre fonctions positives garantissent l'intégrabilité de f sur [1,+∞) et finalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

41. a. La fonction proposée (qu'on notera f) est définie, continue, positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.
En 0, un développement limité montre qu'on peut prolonger f par continuité avec : f(0) = b – a.
La fonction est donc intégrable sur]0,1].
En $+\infty$, Le théorème des croissances comparées montre que x^2.f(x) tend vers 0.
Donc f est intégrable sur [1,+∞) et finalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b. Comme proposé : $\int_\varepsilon^A \frac{e^{-a.x}-e^{-b.x}}{x}.dx = \int_\varepsilon^A \frac{e^{-a.x}}{x}.dx - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-b.x}}{x}.dx$, (ce qui revient à étudier F(A) – F(ε), où F est une primitive de la fonction intégrée).
Effectuons le changement de variable : t = a.x (ou : t = b.x) et :

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-a.x}-e^{-b.x}}{x}.dx = \int_{a.\varepsilon}^{a.A}\frac{e^{-t}}{t}.dt - \int_{b.\varepsilon}^{b.A}\frac{e^{-t}}{t}.dt = \int_{a.\varepsilon}^{b.\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}.dt - \int_{a.A}^{b.A}\frac{e^{-t}}{t}.dt.$$

On remarque alors que $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}.dt$ converge donc que : $\int_{a.A}^{b.A}\frac{e^{-t}}{t}.dt = \int_{a.A}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}.dt - \int_{b.A}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}.dt$, tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$.

Enfin : $e^{-b.\varepsilon}.\int_{a.\varepsilon}^{b.\varepsilon}\frac{1}{t}.dt \le \int_{a.\varepsilon}^{b.\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}.dt \le e^{-a.\varepsilon}.\int_{a.\varepsilon}^{b.\varepsilon}\frac{1}{t}.dt$, soit : $e^{-b.\varepsilon}.\ln\left(\frac{b}{a}\right) \le \int_{a.\varepsilon}^{b.\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}.dt \le e^{-a.\varepsilon}.\ln\left(\frac{b}{a}\right)$, et le théorème des gendarmes montre que la quantité encadrée tend vers $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ quand ε tend vers 0.

Finalement : $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a.x}-e^{-b.x}}{x}.dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Semi-convergence.

42. a. Les deux fonctions intervenant dans les intégrales sont définies, continues sur $\mathbb{R}^+$.

Puis : $\int_1^A \sin(x^2).dx = \int_1^{A^2}\frac{\sin(u)}{2.\sqrt{u}}.du = \left[\frac{-\cos(u)}{2.\sqrt{u}}\right]_1^{A^2} - \frac{1}{4}.\int_1^{A^2}\frac{\cos(u)}{u^{\frac{3}{2}}}.du$.

Le crochet a une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.

De plus $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u^{\frac{3}{2}}}.du$ est absolument convergente, donc convergente, ce qui garantit que l'expression au-dessus a une limite finie en $+\infty$.

Finalement l'intégrale $\int_0^{+\infty}\sin(x^2).dx$ est convergente.

Le raisonnement est identique pour $\int_0^{+\infty}\cos(x^2).dx$.

b. Puisque cette intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ est équivalente à celle sur [$\sqrt{\pi}$,+∞), on va l'étudier sur cet intervalle.

Pour cela, on étudie : $\forall$ n ≥ 2, $F(\sqrt{n.\pi}) = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{n.\pi}}|\sin(x^2)|.dx = \int_\pi^{n.\pi}\frac{|\sin(u)|}{2.\sqrt{u}}.du$.

Puis comme dans l'étude de l'intégrale de Dirichlet, on peut minorer avec :

$$F(\sqrt{n.\pi}) = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{n.\pi}} |\sin(x^2)|.dx = \int_{\pi}^{n.\pi} \frac{|\sin(u)|}{2.\sqrt{u}}.du = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin(v)}{\sqrt{v+k.\pi}}.dv \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Si la fonction proposée était intégrable sur [$\sqrt{\pi}$,+∞), alors la quantité précédente aurait une limite finie quand n tend vers +∞, ce qui est impossible puisqu'elle est minorée par une somme partielle de série qui diverge vers +∞.
La fonction n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et le principe est le même pour l'autre fonction.

Fonctions définies à l'aide d'intégrales généralisées.

43\. a. Pour tout réel a, la fonction sous l'intégrale est définie, continue, positive sur [1,+∞).
Si : a ≤ 0, la fonction sous l'intégrale a une limite finie non nulle en +∞ donc l'intégrale diverge.
Si : a > 0, on a : $\frac{1}{t^a+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^a}$, et l'intégrale converge si et seulement si : a > 1.
Finalement : $\mathscr{D}$ =]1,+∞).

b. On constate ensuite que : ∀ 1 < a < b, ∀ 1 ≤ t, $\frac{1}{t^b+1} \leq \frac{1}{t^a+1}$, et comme les intégrales convergent, on peut intégrer sur [1,+∞), ce qui donne : f(b) ≤ f(a), et f est bien décroissante sur [1,+∞).
Comme de plus la fonction intégrée est positive, f est elle-même positive.
Etant décroissante, on a ainsi la garantie que f admet une limite finie (positive) en +∞.
Mais de plus : ∀ a > 1, $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^a} = f(a) \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a} = \frac{1}{a-1}$.
Le théorème des gendarmes permet de conclure que f(a) tend vers 0 quand a tend vers +∞.

44\. Pour x réel, on pose : $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}.dt$.

a. Pour x réel, notons φ_x la fonction sous l'intégrale : elle est définie, continue, positive sur]0,1].
De plus : $\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$, et l'intégrale est convergente si et seulement si : 1 – x < 1, soit : 0 < x.
Puis : ∀ 0 < x < y, ∀ t ∈]0,1], $\frac{t^{y-1}}{1+t} \leq \frac{t^{x-1}}{1+t}$, et les intégrales étant convergentes, on peut intégrer sur]0,1] pour obtenir : f(y) ≤ f(x).

b. Puis : ∀ x > 0, $f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^x}{1+t}.dt = \int_0^1 t^{x-1}.dt = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$.

c. On peut ainsi écrire : ∀ x > 1, $\frac{1}{x} = f(x) + f(x+1) \leq 2.f(x)$, et : $2.f(x) \leq f(x-1) + f(x) = \frac{1}{x-1}$.
Donc : ∀ x > 1, $\frac{1}{2.x} \leq f(x) \leq \frac{1}{2.(x-1)}$.
Le théorème des gendarmes permet d'en conclure que : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2.x}$.

d. Puisque f est décroissante, f(x+1) a une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
Donc à partir de : $1 = x.f(x) + x.f(x+1)$, si on fait tendre x vers 0, (x.f(x+1)) tend vers 0, et (x.f(x)) tend vers 1.
Conclusion : $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.

45\. a. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}.dt$ est convergente, puisque la fonction sous l'intégrale est définie, continue, positive sur [1,+∞), et elle est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en +∞.

Donc : ∀ x > 0, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}.dt$ est également convergente.

En revanche, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}.dt$ est divergente en 0, puisque la fonction sous l'intégrale est définie, continue, positive sur]0,+∞) et : $\frac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$.

Donc f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ (les valeurs x négatives sont interdites, puisque la fonction à intégrer n'est plus définie sur l'intervalle]x,+∞)).

b. Il suffit d'écrire que : ∀ x > 0, $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}.dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}.dt$.

f apparaît alors naturellement comme l'opposée d'une primitive de fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

A ce titre, elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et : ∀ x > 0, $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.

c. On peut écrire : ∀ x > 0, ∀ x ≤ t, $0 \le x.\frac{e^{-t}}{t} \le e^{-t}$, donc en intégrant sur [x,+∞), on obtient :

∀ x > 0, $0 \le x.f(x) \le \int_x^{+\infty} e^{-t}.dt = e^x$, donc le théorème des gendarmes donne : $\lim_{x\to+\infty}(x.f(x)) = 0$.

Puis : ∀ x > 0, $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}.dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}.dt$, et : $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}.dt = \int_x^1 \frac{1}{t}.dt + \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}.dt = -\ln(x) + \int_x^1 \varphi(t).dt$.

Or $\int_0^1 \varphi(t).dt$ converge puisque la fonction sous l'intégrale a une limite finie en 0.

Donc : $x.f(x) = x.C - x.\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}.dt = x.C - x.\ln(x) + x.\int_1^x \varphi(t).dt$, et quand x tend vers 0, (x.f(x)) tend vers 0.

d. Pour : 0 < a < b, on peut intégrer par parties et écrire :

$\int_a^b f(x).dx = [x.f(x)]_a^b - \int_a^b x.f'(x).dx = [x.f(x)]_a^b + \int_a^b e^{-x}.dx$.

Puisque toutes les quantités qui apparaissent ont une limite finie quand a tend vers 0 et b vers +∞, on conclut que : $\int_0^{+\infty} f(x).dx = 0 - 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}.dx = 1$.

46. a. L'intégrale de Dirichlet est convergente donc également $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt$ ainsi que toute intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt$, pour : x > 0, et f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Puis : ∀ x > 0, $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt - \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}.dt$, et sous cette forme, f est bien de classe C^1 sur]0,+∞), comme l'opposée d'une primitive de fonction continue sur]0,+∞).

De plus : ∀ x > 0, $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$.

b. Soit : A > 0.

Alors : $\int_0^A f(x).dx = [x.f(x)]_0^A - \int_0^A x.f'(x).dx = A.f(A) + \int_0^A \sin(x).dx = A.f(A) - \cos(A) + 1$.

D'autre part : $f(A) = \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_A^{+\infty} - \int_A^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}.dt = \frac{\cos(A)}{A} - \int_A^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}.dt$, et donc :

$\int_0^A f(x).dx = A.f(A) - \cos(A) + 1 = \cos(A) - \cos(A) + 1 - A.\int_A^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}.dt = 1 - A.\int_A^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}.dt$.

Montrons enfin que le dernier produit tend vers 0 quand A tend vers +∞.

Pour cela : $A.\int_A^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}.dt = A.\left[\frac{\sin(t)}{t^2}\right]_A^{+\infty} + 2.A.\int_A^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^3}.dt = -\frac{\sin(A)}{A} + 2.\int_A^{+\infty} \frac{A}{t}.\frac{\sin(t)}{t^2}.dt$, et enfin :

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{A}{t}.\frac{\sin(t)}{t^2}.dt\right| \le \int_A^{+\infty} \frac{A}{t}.\frac{|\sin(t)|}{t^2}.dt \le \int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}.dt = \frac{1}{A}.$$

Conclusion : $A.\int_A^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}.dt$ tend bien vers 0 quand A tend vers +∞, et $\int_0^A f(x).dx$ tend vers 1, toujours quand A tend vers +∞ ; on a donc : $\int_0^{+\infty} f(x).dx = 1$.

Remarque : toutes les intégrations par parties et les majorations faites ici sont justifiées par la convergence des intégrales qui apparaissent.

c. La fonction (qu'on notera φ) se prolonge en effet sur ℝ, en posant classiquement : φ(0) = 1.

Dans ce cas, on a : ∀ x ∈ ℝ, $f(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t).dt$, est une intégrale généralisée en sa borne haute, de même nature que $\int_1^{+\infty} \varphi(t).dt$ qui est convergente.

Donc f se définit sur ℝ, et en appliquant la relation de Chasles à cette intégrale, on a :

∀ x ∈ ℝ, $f(x) = \int_1^{+\infty} \varphi(t).dt - \int_1^x \varphi(t).dt$, d'où f est de classe C^1 sur ℝ, et : $f'(x) = -\varphi(x)$.

Comparaison série-intégrale.

47. u_n étant le reste d'une série de Riemann convergente (pour : α = 2), on sait que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2-1}.\frac{1}{n^{2-1}} = \frac{1}{n}$.

Donc la série $\sum_{n\ge1} u_n$ diverge.

48. • Pour : α ≤ 0, alors : ∀ n > e, $u_n = \frac{(\ln(n))^{-\alpha}}{n} \ge \frac{1}{n}$, et la série $\sum_{n\ge3} u_n$ diverge.

• Pour : α > 0, la fonction f_α : $t \mapsto \frac{1}{t.(\ln(t))^\alpha}$, est positive et décroissante sur [e,+∞).

Donc la série $\sum_{n\ge3} u_n$ et l'intégrale $\int_e^{+\infty} f_\alpha(t).dt$ sont de même nature.

Or si : α = 1, alors : $\int_e^x f_\alpha(t).dt = \int_e^x \frac{1}{t.\ln(t)}.dt = [\ln(\ln(t))]_e^x = \ln(\ln(x))$, qui tend vers +∞ en +∞,

et si : α ≠ 1, alors : $\int_e^x f_\alpha(t).dt = \int_e^x \frac{1}{t.(\ln(t))^\alpha}.dt = \int_1^{\ln(x)} \frac{du}{u^\alpha} = \left[\frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{\ln(x)} = \frac{1}{1-\alpha}.\left(\frac{1}{(\ln(x))^{\alpha-1}} - 1\right)$, qui a une limite finie en +∞ si et seulement si : α > 1.

Conclusion : la série $\sum_{n\ge3} u_n$ converge si et seulement si : α > 1.

49. La fonction f : $t \mapsto (\ln(t))^2$, est croissante sur [1,+∞).

Donc : ∀ k ≥ 1, on peut alors écrire : ∀ t ∈ [k,k+1], $(\ln(k))^2 \le (\ln(t))^2 \le (\ln(k+1))^2$, puis en intégrant et en sommant de 1 à n (avec : n ≥ 1) : $S_n = \sum_{k=1}^n (\ln(k))^2 \le \int_1^{n+1} (\ln(t))^2.dt \le \sum_{k=1}^n (\ln(k+1))^2 = \sum_{k=2}^{n+1} (\ln(k))^2 = S_{n+1}$.

D'où : ∀ n ≥ 1, $\int_1^n (\ln(t))^2.dt \le S_n \le \int_1^{n+1} (\ln(t))^2.dt$.

A l'aide d'intégrations par parties, on obtient :

∀ n ≥ 1, $\int_1^n (\ln(t))^2.dt = n.(\ln(n))^2 - 2.n.\ln(n) + 2.n + 2$, et : $u_n = \frac{1}{S_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n.(\ln(n))^2}$.

Par comparaison de séries à termes positifs, l'étude des séries de Bertrand montre que la série $\sum_{n\ge2} u_n$ converge.

Autour des équations différentielles.

50. a. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre et donc, on procède en deux temps :

• l'équation homogène associée a pour solutions les fonctions y données par :

$\forall$ x $\in$]0,+∞), $y(x) = C.e^x$, avec : C $\in$ ℝ.

• on cherche une solution particulière de l'équation complète, à l'aide de la méthode de variation de la constante, ce qui conduit à :

$y(x) = C(x).e^x$, avec C dérivable sur]0,+∞), et y est solution si et seulement si :

$C'(x).e^x = \ln(x)$, soit : $C(x) = \int_1^x \ln(t).e^{-t}.dt + K$, où : K $\in$ ℝ.

Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme :

$\forall$ x $\in$]0,+∞), $y(x) = e^x.(\int_1^x \ln(t).e^{-t}.dt + K)$, avec : K $\in$ ℝ.

b. Une solution sera bornée (sur]0,+∞)) si et seulement si elle admet une limite finie en 0 et en +∞ (théorème de sup).
Soit donc y une fonction parmi les fonctions trouvées au-dessus.

• en 0, y admet une limite finie si et seulement si : $\lim_{x\to 0}\int_1^x \ln(t).e^{-t}.dt$ existe et est finie.

Ceci revient à examiner la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \ln(t).e^{-t}.dt$.

Or la fonction sous l'intégrale est définie, continue sur]0,1], négative, et en 0 on a : $\lim_{t\to 0}\sqrt{t}.\ln(t).e^{-t} = 0$, à l'aide d'un équivalent de l'exponentielle et du théorème des croissances comparées.
Donc l'intégrale est convergente et y admet une limite finie en 0 (pour toute valeur de K).
• en +∞, e^x tend vers +∞.
Donc si on veut que y ait une limite finie en +∞, il est nécessaire que la parenthèse tende vers 0.

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(t).e^{-t}.dt$ est convergente.

En effet, la fonction sous l'intégrale est définie, continue, positive sur [1,+∞) et : $\lim_{t\to+\infty} t^2.\ln(t).e^{-t} = 0$, du fait du théorème des croissances comparées.
Donc si y est une solution bornée, elle vaut :

$\forall$ x > 0, $y(x) = e^x.(\int_1^x \ln(t).e^{-t}.dt - \int_1^{+\infty} \ln(t).e^{-t}.dt) = -e^x.\int_x^{+\infty} \ln(t).e^{-t}.dt$.

Vérifions pour terminer si cette fonction a une limite finie en +∞, et pour cela :

$\forall$ x > 1, $\forall$ t ≥ x, $\ln(x) \le \ln(t)$, donc : $\ln(x).e^{-t} \le \ln(t).e^{-t}$, et : $\int_x^{+\infty} \ln(x).e^{-t}.dt \le \int_x^{+\infty} \ln(t).e^{-t}.dt$.

Donc après calcul de la première intégrale : $\ln(x).e^{-x} \le \int_x^{+\infty} \ln(t).e^{-t}.dt$, et : $\ln(x) \le |y(x)|$.

Donc y tend vers -∞ en +∞, et n'a donc pas de limite finie en +∞.
Conclusion : il n'y a pas de solution bornée sur]0,+∞) à cette équation différentielle.

51. Notons : $\forall$ x $\in$ ℝ, h(x) = f'(x) + α.f(x).
Alors f est solution de l'équation différentielle : y' + α.y = h.
Or les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y de la forme :

$\forall$ x $\in$ ℝ, $y(x) = e^{-\alpha.x}.(\int_0^x h(t).e^{\alpha.t}.dt + K)$, avec : K $\in$ ℝ ou ℂ.

Donc f peut se mettre sous cette forme, puisqu'elle est solution de l'équation différentielle.
Montrons alors que toute fonction de cette forme tend vers 0 en +∞.
Tout d'abord, et pour toute valeur de K, x $\mapsto$ $K.e^{-\alpha.x}$, tend vers 0 en +∞ (Re(α) > 0), donc il reste à étudier l'autre terme.
Pour cela, notons : α = a + i.b, (a,b) $\in$ $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$, et soit : ε > 0.

Puisque h tend vers 0 en +∞, on sait que : $\exists$ A > 0, $\forall$ x ≥ A, $|h(x)| \le \frac{\varepsilon.a}{2}$, et :

$\forall$ x > A, $\left|\int_0^x h(t).e^{\alpha.t}.dt\right| \le \left|\int_0^A h(t).e^{\alpha.t}.dt\right| + \left|\int_A^x h(t).e^{\alpha.t}.dt\right| \le I_A + \int_A^x |h(t)|.|e^{\alpha.t}|.dt \le I_A + \frac{\varepsilon.a}{2}.\int_A^x e^{a.t}.dt$,

où I_A désigne la valeur absolue (ou le module) de la première intégrale.

Donc : $\left|e^{-\alpha.x}.\int_0^x h(t).e^{\alpha.t}.dt\right| \leq e^{-a.x}.(I_A + \frac{\varepsilon.a}{2}.\int_A^x e^{a.t}.dt) = I_A.e^{-a.x} + \frac{\varepsilon.a}{2}.e^{-a.x}.\left[\frac{e^{a.t}}{a}\right]_A^x \leq I_A.e^{-a.x} + \frac{\varepsilon}{2}$.

On remarque alors que la fonction : x $\mapsto$ $I_A.e^{-a.x}$, tend vers 0 en +∞, donc :

∃ B > A (on peut le choisir ainsi), tel que : ∀ x ≥ B, $\left|I_A.e^{-a.x}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement : ∀ x ≥ B, $\left|e^{-\alpha.x}.\int_0^x h(t).e^{\alpha.t}.dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

et on vient de démontrer que la fonction : x $\mapsto$ $e^{-\alpha.x}.\int_0^x h(t).e^{\alpha.t}.dt$, tend vers 0 quand x tend vers +∞.

Conclusion : la fonction f donnée au début de l'énoncé tend bien vers 0 en +∞.
Remarque : on retrouve le « principe » qui veut que lorsqu'on commence une étude de limite « avec des ε », on la termine « avec des ε ».