

Séries entières.

Exercices 2012-2013

Exercices de base.

Calcul de rayons de convergence.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a. $\sum_{n \geq 1} \frac{(3.n)!}{(n!)^3 . n^n} . x^n$,

b. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^4 + n}{2^n + \sqrt{n!}} . x^n$,

c. $\sum_{n \geq 1} (\sqrt[3]{n})^{2.n} . x^n$,

d. $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}) . x^n$,

e. $\sum_{n \geq 0} (e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}}) . x^n$,

f. $\sum_{n \geq 0} \tan(\pi . \sqrt{n^2 + 3.n + 1}) . x^n$,

2. Calculer le rayon de convergence des séries :

a. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3.n}}{n^2 + 1}$,

b. $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{4^n + n} . x^{4.n}$,

c. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2^n}}{3^n + 1}$.

Exercices plus théoriques sur les rayons de convergence.

3. Montrer que $(\cos(n))_{n \geq 0}$ ne converge pas vers 0.

En déduire le rayon de convergence de $\sum (\cos(n)) . z^n$ et l'étude au bord du disque de convergence.

4. Soit $\sum a_n . z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Montrer que s'il existe : $z_0 \in \mathbb{C}$, tel que $\sum a_n . z_0^n$ soit semi-convergente, alors : $R = |z_0|$.

5. Soit $\sum a_n . z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et soit : $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Etudier le rayon de convergence de $\sum \lambda^n . a_n . z^n$.

Propriété de sommes de séries entières.

6. Soit la série entière : $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) . x^n$.

a. Déterminer son rayon de convergence et étudier la convergence en $\pm R$.

On note S la somme de cette série entière.

b. Etudier la continuité de S, et montrer que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) . S(x) = 0$.

7. Soit P un polynôme à coefficients réels, et f défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(P(x))$.

On suppose que les coefficients du DSE(0) de f sont tous positifs ou nuls, et que : $f'(x_0) = 0$, pour une valeur : $x_0 \geq 0$, telle que : $P'(x_0) = 0$.

Montrer que : $P''(x_0) \geq 0$.

8. Soit la suite réelle (u_n) définie par : $u_0 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{p+q=n} u_p . u_q$.

On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et on suppose le rayon de convergence R de f non nul.

Soit alors x réel tel que : $|x| < R$.

a. Montrer que f(x) est racine d'une équation du 2nd degré, et en déduire que : $R \geq 1/4$.

A-t-on montré que : $R \neq 0$?

b. Montrer que les coefficients (v_n) du développement en série entière de : $g(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4.x}}{2.x}$ sur

$] -1/4, 1/4[$ vérifient la même relation de récurrence que (u_n) .

c. En déduire que pour tout $n : u_n = v_n$, et préciser u_n pour tout n , puis un équivalent de u_n en $+\infty$.

9. Soit : $I(p,q) = \int_0^1 t^p \cdot (1-t)^q \cdot dt$, avec : $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

a. A l'aide d'intégrations par parties, calculer $I(p,q)$, pour tout : $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

b. Déterminer la nature de la série de terme général : $a_n = I(n,n)$.

c. Déterminer le domaine de définition de : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$.

10. Soit : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$, une série entière de rayon de convergence 1 telle que de plus : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$.

On suppose de plus que S est bornée sur $] -1, +1[$.

a. En utilisant des sommes partielles de la série entière, montrer que la série $\sum a_n$ converge.

b. Montrer que la fonction S admet une limite finie L en 1 par valeurs inférieures.

c. Montrer par double inégalité que : $L = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Développements en série entière.

11. Pour les fonctions suivantes, montrer qu'elles sont développables en série entière autour de 0, préciser ce développement et donner le rayon de convergence des séries obtenues :

a. Décomposition en éléments simples de fonctions rationnelles :

$$\bullet \frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 1}, \quad \bullet \frac{1}{x^2 - 2x \cdot \cos(\theta) + 1}, \text{ pour : } \theta \in \mathbb{R},$$

b. Dérivation, primitivation :

$$\bullet \ln(1 + x + x^2), \quad \bullet \operatorname{Arc tan} \left(\frac{1+x}{1-x} \cdot \tan(\alpha) \right), \text{ pour : } \alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \bullet \int_0^x \operatorname{sh}(t^2) \cdot dt,$$

c. Divers (linéarisation, produit) :

$$\bullet (1+x) \cdot \ln(1+x), \quad \bullet \sin^3(x) \text{ ou } \cos^3(x).$$

12. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(0) = 0$, et pour x non nul, $f(x) = \exp(-1/x^2)$.

a. Montrer que f est continue, C^1 puis C^∞ sur \mathbb{R} , et préciser $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n .

b. Etudier la série de Taylor de f en 0.

c. Qu'en déduit-on ?

Utilisation de développements en série entière.

13. Montrer que la fonction définie par : $f(0) = 1/2$, et : $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ pour : $x \neq 0$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Préciser un développement en série entière en 0 de sa primitive qui s'annule en 0.

14. On note : $S(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

a. Montrer que S admet un développement en série entière sur $] -1, 1[$ et que on peut prolonger S en 1 par continuité.

b. En déduire que : $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n \cdot (4n+1)}$ (on pourra utiliser la formule de Stirling).

15. Soit la série entière $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \cdot \ln(n) \cdot x^n$.

a. Calculer son rayon de convergence.

On notera S sa somme.

b. Montrer : $\forall x \in] -1, 1[$, $S(x) = \frac{1}{1+x} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot x^{n+1}$.

c. En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

d. En utilisant la formule de Wallis : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2 \cdot n)! \sqrt{2 \cdot n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, (ou Stirling), calculer la limite de la question c.

16. a. Montrer que : $\forall a > 0$, la fonction : $t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$, se développe en série entière sur $[0,1[$, et que cette série entière admet une primitive sous forme de série qui converge uniformément sur $[0,1]$.

b. En déduire que : $\forall a > 0$, $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n \cdot a}$.

c. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n+1}$, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot n+1}$?

Calcul de sommes de séries entières.

17. Déterminer le rayon de convergence R et la somme des séries entières :

a. $\sum_{n \geq 0} (n^2 + n + 1) \cdot x^n$, b. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 3 \cdot n + 4}{n+1} \cdot x^n$, c. $\sum_{n \geq 1} \left(n - \frac{1}{n}\right) \cdot x^n$,
d. $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n \cdot (n-1)} \cdot x^n$, e. $\sum_{n \geq 0} (n + (-1)^n) \cdot x^n$.

18. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries :

a. $\sum_{n \geq 0} \cos(n \cdot \theta) \cdot x^n$, pour : $\theta \in \mathbb{R}$. b. $\sum_{n \geq 0} \sin(n \cdot \theta) \cdot x^n$, pour : $\theta \in \mathbb{R}$.

b. En déduire l'étude des séries : $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n \cdot \theta)}{n} \cdot x^n$, et : $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n \cdot \theta)}{n} \cdot x^n$.

c. Soit z un complexe non nul, tel que : $z = \rho \cdot e^{i \cdot \theta}$, avec : $\rho > 0$, et : $\theta \in]-\pi, +\pi[$.

Calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$.

Autour de l'exponentielle complexe.

19. Montrer que : $\forall (z, N) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$, $\left| e^z - \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right| \leq e^{|z|} - \sum_{n=0}^N \frac{|z|^n}{n!}$.

20. Résoudre : $\sin(z) = 2$.

Exercices plus.

Calcul de rayons de convergence.

21. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sum_{k=1}^n \text{sh}(k)}{n \cdot e^n} \cdot z^n$, b. $\sum_{n \geq 1} \left(\text{Arc cos} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \right) \cdot z^n$,
c. $\sum_{n \geq 0} \left(\text{Arc tan} \left(\frac{n}{n+1} \right) - \frac{\pi}{4} \right) \cdot z^n$, d. $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1+b^n} \cdot z^n$, où : $(a, b) \in \mathbb{R}^{+*2}$,
e. $\sum_{n \geq 1} e^{-(\ln(n))^a} \cdot z^n$, où : $a \in \mathbb{R}$, f. $\sum_{n \geq 1} \left(\text{ch} \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n \cdot z^n$, où : $a \in \mathbb{R}$,
g. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{a+(-1)^n}} \cdot z^n$, où : $a \in \mathbb{R}$, h. $\sum_{n \geq 0} \left(\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) \cdot dx \right) \cdot z^n$.

On pourra étudier, pour z réel, le problème de la convergence de la série en $\pm\mathbb{R}$.

22. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum P(n).z^n$.

- Montrer que : $(1, X, X.(X-1), \dots, X.(X-1)\dots(X-n+1), \dots)$ forme une base de $\mathbb{C}[X]$.
- En déduire un algorithme permettant de calculer la somme de la série entière précédente pour tout polynôme P .
- Appliquer cette méthode à : $\sum (n^2 + n + 1).x^n$, $\sum n^3 x^n$.

Exercices plus théoriques sur les rayons de convergence.

23. Déterminer le rayon de convergence des séries : $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n)}{n^2 + 1}.z^n$, et : $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n + (-1)^n}}.z^n$.

Transformation d'Abel et application aux séries entières.

24. a. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes.

On note, pour : $p \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_p = \sum_{k=1}^p v_k$.

Montrer que : $\forall p \geq 1, \sum_{k=1}^p u_k.v_k = u_p.\sigma_p + \sum_{k=1}^{p-1} (u_k - u_{k+1}).\sigma_k$.

b. On suppose de plus que ces suites sont telles que :

- (u_n) est réelle, décroissante de limite 0,
- la suite (σ_p) est une suite bornée.

Montrer que la série de terme général $u_n.v_n$ converge.

c. Donner le rayon de convergence et l'étude au bord des séries entières suivantes :

- $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$, avec : $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\sum_{n \geq 2} \frac{\cos(n).x^n}{n}$.

Propriétés de sommes de séries entières.

25. Soit : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n .x^n$, la somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1.

On pose, pour : $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, et pour : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n .x^n$, de rayon de convergence noté R .

- Montrer que si : $|x| < R$, alors $S(x)$ converge.
- Montrer que si : $|x| < 1$, la suite $(S_n.x^n)$ est bornée.
- En déduire la valeur de R .
- Montrer que : $\forall |x| < 1, S(x) = (1-x).f(x)$.

Développements en série entière.

26. Pour les fonctions suivantes, montrer qu'elles sont développables en série entière autour de 0, préciser ce développement et donner le rayon de convergence des séries obtenues :

a. Utilisation d'une équation différentielle : $e^{a.\text{Arc sin}(x)}$, pour : $a \in \mathbb{R}$,

b. En développant la fonction sous l'intégrale : $\int_0^\pi \ln(1 + x.\sin^2(t)).dt$.

27. Soit f une fonction de classe C^∞ de $] -a, +a[$ dans \mathbb{R} , avec : $a > 0$, et telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in] -a, +a[, f^{(n)}(x) \geq 0$.

a. Justifier que toutes les dérivées de la fonction f sont croissantes sur $] -a, +a[$.

b. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < r < a, f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} .x^k = \frac{x^{n+1}}{n!} . \int_0^1 (1-u)^n . f^{(n+1)}(x.u).du$

c. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < r < a, \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} .x^k \right| \leq \left| \frac{x}{r} \right|^{n+1} . f(r)$.

- d. En déduire que la fonction f est développable en série entière sur $] -a, +a[$.
- e. Montrer que la fonction tangente est telle que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, \tan^{(n)} = P_n(\tan)$, où \tan est un polynôme de parité égale à celle de $n+1$.
- f. En déduire, en s'inspirant de ce qui précède que tangente est développable en série entière sur $[0, \pi/2[$.
- g. Conclure à l'aide d'un argument de parité que tangente est développable en série entière sur $] -\pi/2, +\pi/2[$.

28. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{sh}(a^n \cdot x)$ sur \mathbb{R} , où : $0 < a < 1$.

- a. Montrer que f est C^∞ sur \mathbb{R} , et étudier si elle est développable en série entière en 0.
 b. Si oui, préciser ce développement.

Utilisation de développements en série entière.

29. a. Montrer que pour tout x dans $] -1, 1[$, la fonction définie par : $t \mapsto \frac{\ln(1 + x^2 \cdot \sin^2(t))}{\sin^2(t)}$ peut se prolonger en

une fonction continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

b. Montrer alors que : $\forall x \in] -1, 1[$, $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + x^2 \cdot \sin^2(t))}{\sin^2(t)} \cdot dt = \pi \cdot (\sqrt{1+x} - 1)$.

30. Résoudre l'équation d'inconnue x : $\sum_{n=0}^{+\infty} (3 \cdot n + 1)^2 \cdot x^n = 0$.

On pourra commencer par essayer de sommer la série entière, après étude habituelle de son rayon de convergence.

31. Montrer que : $\int_0^1 \frac{1}{x^x} \cdot dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Calcul de sommes de séries entières.

32. Déterminer le rayon de convergence R et la somme des séries entières :

- a. $\sum_{n \geq 1} \frac{2^{(-1)^n}}{n} \cdot x^n$, b. $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{(2 \cdot n)!}$, c. $\sum_{n \geq 1} \frac{4 \cdot n + 1}{n^2 + n - 2} \cdot x^n$.

Autour des fonctions sinus et cosinus et de l'exponentielle complexe.

33. On note : $C(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2 \cdot n}}{(2 \cdot n)!}$, et : $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2 \cdot n + 1}}{(2 \cdot n + 1)!}$.

- a. Montrer que le rayon de convergence de ces séries est $+\infty$, et que pour tout t , $C(t) + i \cdot S(t)$ est un complexe de module 1.
 b. Montrer que C et S sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et relier C' et S' à C et S .
 c. Préciser $C(0)$ et $S(0)$.
 d. Montrer que C est positive sur un voisinage de 0, et que : $C(2) < 0$; on note : $\alpha = \inf\{x > 0, C(x) = 0\}$.
 e. Montrer que : $\alpha \neq 0$, $C(\alpha) = 0$ (attention, c'est une borne inf !) et en déduire que : $S(\alpha) = 1$.
 f. Calculer $C(2 \cdot \alpha)$ (on posera : $\pi = 2 \cdot \alpha$) puis montrer que les fonctions C et S sont $2 \cdot \pi$ -périodiques, tracer leur tableau de variations sur $[0, 2 \cdot \pi]$, et retrouver leurs propriétés élémentaires.
 g. Montrer enfin que pour tout complexe z de module 1, il existe un unique θ dans $[0, 2 \cdot \pi[$, tel que :
 $z = \exp(i \cdot \theta)$.