Notes de cours

Intégrale multiple

PC, Lycée Dupuy de Lôme

1 Intégrales doubles

1.1 Théorème de Fubini

Théorème (Fubini) Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On a :

$$\int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy$$

Cette valeur commune peut être notée :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$$

Preuve Mélange du théorème fondamental de l'analyse et du théorème de continuité/dérivabilité des intégrales à paramètres.

Remarque On peut mettre en évidence le cas particulier suivant. Soit $u : [a,b] \to \mathbf{R}$, $v : [c,d] \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} u(x)v(y)dxdy = \int_a^b u(x)dx \int_c^d v(y)dy$$

Preuve ...

Exemple Calculer :

$$\iint_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \cos(x+y)dxdy$$

Exemple (calcul d'intégrale simple à partir d'une intégrale double) Soit $a, b > 1$, calculer J, en déduire I :

$$J = \iint_{[a,b]\times[0,\pi]} \frac{dxdt}{x-\cos(t)} \ , \ I = \int_0^\pi \ln(\frac{b-\cos(t)}{a-\cos(t)})dt$$

1.2 Calcul en coordonnées cartésiennes

Définition Soit $y_1, y_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues. Soit

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ a \leq x \leq b\ \ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

Soit $f : \Delta \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On note :

$$\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dydx$$

Remarque On peut obtenir une définition analogue pour des domaines du type :

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x_1(y) \leq x \leq x_1(y)\ \ c \leq y \leq d\}$$

Remarque Ici, l'ordre des variables est essentiel.
Exemple Calculer

$$\iint_\Delta xydxdy \ , \ \ \Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2, \ x+y \leq 1\}$$

Exemple Calculer

$$\iint_\Delta yx^2dxdy \ , \ \ \Delta = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \ x \leq 1, y \geq 0, y^2 \leq x\}$$

1.3 Calcul en coordonnées polaires

Théorème (calcul en coordonnées polaires) Soit $f : \Delta \to \mathbf{R}$ une fonction continues. On pose

$$\Delta^* = \{(r,\theta) \in]0,+\infty[\times\mathbf{R}, \ (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in \Delta\}$$

On a alors

$$\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int\int_{\Delta^*} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta$$

Remarque Cela est utile lorsque Δ est un domaine circulaire.
Exemple Calculer

$$\iint_\Delta (x+y)^2dxdy \ , \ \ \Delta = \{(x,y) \in [0,+\infty[^2, \ x^2+y^2 \leq 1\}$$

Exemple Calculer

$$\iint_\Delta xdxdy \ , \ \ \Delta = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \ x^2+y^2-2y \leq 0\}$$

1.4 Calcul d'aire

Définition Soit Δ une partie du plan. On appelle aire de Δ :

$$\iint_\Delta 1dxdy$$

Exemple Calculer l'aire de $H \cap D$ où

$$H = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \ xy \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\} \ , \ \ D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \ x^2+y^2 \leq 1\}$$

2 Intégrales triple

2.1 Calcul en coordonnées cartésiennes

Remarque Les méthodes utilisées dans le plan peuvent être généralisées.
Exemple Calculer

$$I = \iiint_D xy^2z^3dxdydz \ , \ \ D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$$

Exemple

$$I = \iiint_D zdxdydz \ , \ \ D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, x^2+y^2+z^2 \leq 1, x^2+y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$$

2.2 Calcul en coordonnées sphérique

Remarque Lorsque le domaine est d'allure sphérique, on peut utiliser les coordonnées sphériques :

$$x = r\cos(\theta)\cos(\phi) \ \ , \ \ y = r\sin(\theta)\cos(\phi) \ \ , \ \ z = r\sin(\phi)$$

On remplace alors :

$$dxdydz = r^2\sin(\theta)drd\theta d\phi$$

Exemple Calculer

$$I = \iiint_D xyzdxdydz \ \ , \ \ D = \{(x,y,z) \in [0,+\infty[^3, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

2.3 Calcul en coordonnées cylindrique

Remarque Lorsque le domaine est d'allure cylindrique, on peut utiliser les coordonnées cylindriques :

$$x = r\cos(\theta) \ \ , \ \ y = r\sin(\theta) \ \ , \ \ z$$

On remplace alors :

$$dxdydz = rdrd\theta dz$$

Exemple Calculer

$$I = \iiint_D 1dxdydzD = \{(x,y,z) \in]0,+\infty[^3, x^2+y^2 \leq R^2, z \geq a\}$$

2.4 Volume

Définition Soit Δ une partie de l'espace. On appelle volume de Δ :

$$\iiint_\Delta 1dxdydz$$

3 Intégrale curviligne

3.1 Définition

Définition (intégrale curviligne) Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée par $t \in [a,b] \to (x(t),y(t)) \in \Omega$ continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit $P, Q : \Omega \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues. On pose par définition

$$\oint_\mathcal{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt$$

Exemple Calculer

$$\oint_\mathcal{C} \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O de rayon R

Exemple Calculer

$$\oint_\mathcal{T} ydx + dy$$

où $\mathcal{T}$ est le triangle :

$$\mathcal{T} = \{(x,y) \in [0,a]^2, x+y \leq a\}$$

3.2 Formule de Green-Riemann

Théorème (formule Green-Riemann) Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Soit $P, Q : \Omega \to \mathbf{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$. Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, fermée, sans point double, parcourue dans le sens direct, délimitant un domaine Δ tel que $\Delta \subset \Omega$. Alors :

$$\oint_{\mathcal{C}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{\Delta} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

Exemple Calculer de deux manières différentes :

$$\iint_{\mathcal{D}} (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})dxdy$$

où $\mathcal{D}$ est le disque de centre O de rayon 1

Exemple Calculer de deux manières différentes :

$$I = \oint_{\mathcal{C}} (y + xy)dx$$

où $\mathcal{D}$ est la partie du plan délimitée par la droite d'équation $(y = x)$ et la parabole $(y = x^2)$

3.3 Calcul d'aire

Proposition Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, fermée, sans point double, parcourue dans le sens direct, délimitant un domaine Δ. L'aire de Δ est :

$$A(\Delta) = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} (xdy - ydx) \oint_{\mathcal{C}} xdy = - \oint_{\mathcal{C}} ydx$$

Preuve Cas particulier de la formule de Green-Riemann.

Exemple Calculer l'aire de la partie intérieure à l'ellipse d'équation $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1)$.

Proposition Soit $\mathcal{C}$ une courbe polaire continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, fermée, sans point double, parcourue dans le sens direct, délimitant un domaine Δ. L'aire de Δ est :

$$A(\Delta) = \frac{1}{2} \int_I r^2(\theta)d\theta$$

Preuve On paramètre la courbe polaire.

Exemple Calculer l'aire de la boucle de la courbe d'équation polaire :

$$r(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$$