

On retrouve dans différents domaines de la physique la notion de propagation d'une onde. On peut citer

- Les ondes sonores dans un fluide ou un solide
- Les ondes électromagnétiques dans le vide à différentes longueurs d'ondes, dont le visible (phénomène ici plus complexe car à l'onde est associée un corpuscule : le photon)
- Les déformations d'une corde ...

Nous verrons que sous certaines conditions, notamment sur le milieu de propagation, les grandeurs physiques associées à ces ondes vérifient l'équation d'Alembert.

Nous allons ici développer les applications dans le cas d'une propagation unidirectionnelle.

1 Equation d'Alembert unidimensionnelle et ses solutions

On considère une propagation selon la direction OX et on note $s(x, t)$ la caractéristique de l'onde. s peut correspondre à la déformation transversale d'une corde, à la valeur du champ électrique associé à une Onde Electro Magnétique (OEM) etc...

Equation d'Alembert

Une grandeur physique $s(x, t)$ vérifie l'équation d'Alembert unidimensionnelle si

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0$$

avec c la célérité de l'onde, en $m.s^{-1}$

Cette équation doit être connue, si vous hésitez entre $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$, une étude d'homogénéité aura vite fait d'ôter vos doutes...

1.1 Solutions de l'équation d'Alembert

Formes des solutions

On considère une solution du type $s(x, t) = f(u)$ avec $u = t + \epsilon \frac{x}{c}$, $\epsilon = C^{te}$. On peut alors remarquer que

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = f''(u) \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = (\epsilon)^2 \frac{1}{c^2} f''(u)$$

$f(u)$ sera alors solution de l'équation d'Alembert si

$$f''(u) - c^2 (\epsilon)^2 \frac{1}{c^2} f''(u) = 0 \longrightarrow 1 - \epsilon^2 = 0 \longrightarrow \epsilon = \pm 1$$

On a donc trouvé deux solutions à cette équation d'Alembert.

Nous admettrons qu'une combinaison linéaire de ces deux solutions constitue la solution générale de l'équation.

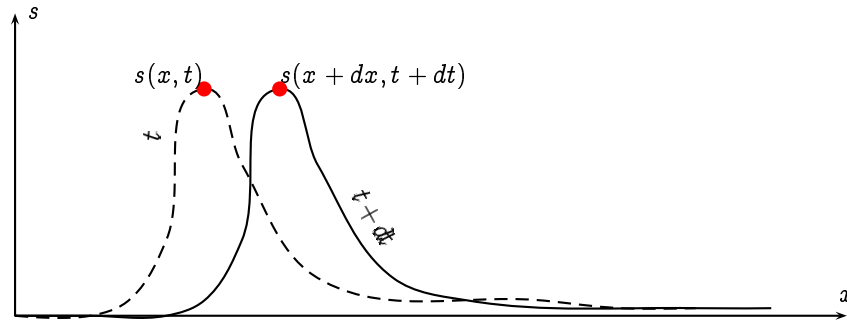
$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Interprétation physique Montrons que l'onde $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ correspond à une onde progressive

On peut considérer deux états $s(x, t)$ et $s(x + dx, t + dt)$

Imaginons le maximum de déformation d'une corde que l'on suit entre deux instants t et $t + dt$. La déformation visible à l'instant t à l'abscisse x se retrouvera à l'instant $t + dt$ à l'abscisse $x + dx$. Par conséquent on peut écrire que

$$s(x, t) = s(x + dx, t + dt)$$



Cela revient à écrire

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right) = f\left(t + dt - \frac{x + dx}{c}\right)$$

Une des solutions à cette égalité est $t - \frac{x}{c} = t + dt - \frac{x + dx}{c}$ ce qui amène à la relation

$$\frac{dx}{dt} = c$$

On remarque donc que si $dt > 0$, dx l'est également. La déformation se déplace donc selon les valeurs croissantes de x , l'onde est progressive.

La solution $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ correspond à une onde progressive dans le sens croissant

Forme générale de la solution

L'équation d'Alembert unidimensionnelle a pour solution

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

correspondant à la superposition de propagations progressive à la même vitesse c , dans des sens opposés

■ La superposition de ces deux ondes progressives peut elle ne pas l'être.

1.2 Cas d'une onde progressive harmonique

Considérons une onde progressive selon les x croissants ($OPP(+)$)

L'onde plane progressive harmonique aura pour solution

$$s(x, t) = S_0 \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Afin de faire apparaître les périodicités de la fonction, on peut l'écrire sous la forme

$$s(x, t) = S_0 \cdot \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

On utilisant l'équation d'Alembert, on peut alors obtenir une relation, dite de dispersion :

$$-\omega^2 s(x, t) - c^2(-k^2 s(x, t)) = 0 \longrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Or k et ω sont des constantes positives.

OPPH

Une Onde Plane Progressive Harmonique se propageant dans le sens des x croissants est caractérisée par son vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$ avec k le nombre d'onde. Elle se décrit par la grandeur $s(x, t)$

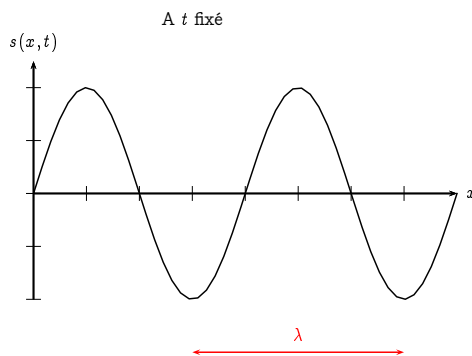
$$s(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

On y associe une représentation complexe

$$\underline{s} = S_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)} = \underline{S}_0 e^{i(\omega t - kx)} \text{ avec } \underline{S}_0 = S_0 e^{i\varphi}$$

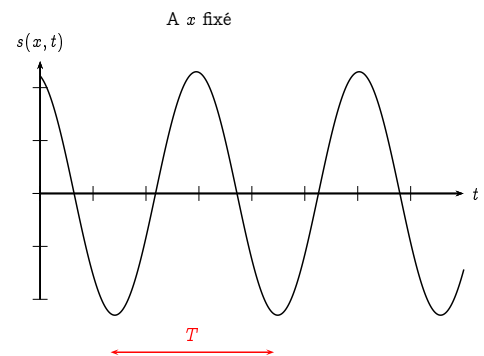
Avec ω la pulsation temporelle et k la pulsation spatiale vérifiant la *relation de dispersion* $k = \frac{\omega}{c}$

Description spatiale



- Pulsation spatiale : k (norme du vecteur d'onde)
- Fréquence spatiale : $\sigma = \frac{k}{2\pi}$
- Période spatiale (longueur d'onde) $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\sigma}$

Description temporelle



- Pulsation : ω
- Fréquence : $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$
- Période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$

1.3 Onde Stationnaire

Une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants est susceptible de rencontrer un obstacle à sa propagation. Une partie de cette onde peut alors être réfléchiée, c'est à dire qu'une onde progressive se propageant dans le sens des x décroissants apparaîtra. On peut alors imaginer une solution du type

$$s(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx) + S_0 \cos(\omega t + kx)$$

$$s(x, t) = 2.S_0 \cos(\omega t) \cos(kx)$$

La solution ne fait plus apparaître de phénomène de propagation, l'onde est alors dite *stationnaire*

On retiendra qu'une onde stationnaire peut se mettre sous la forme

$$s(x, t) = f(x)g(t)$$

1.3.1 Solutions pour une onde stationnaire

L'exemple le plus parlant est sans nul doute le cas de la corde fixée à ses deux extrémités.
On observe ci contre un *mode propre* de vibration d'une corde

Reprenons la forme de la solution proposée et l'équation d'Alembert

$$g''(t)f(x) - c^2 f''(x)g(t) = 0 \rightarrow \frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} \quad \forall (x, t)$$

On a donc l'égalité de deux grandeurs, l'une ne dépendant que de t , l'autre que de x , et ceci $\forall (x, t)$. Il est donc évident que cette égalité est une constante

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = -K^2$$

On place le signe $-$ par commodité dans la suite des calculs.

On obtient donc un système de deux équations indépendantes

$$\begin{cases} f''(x) + \frac{K^2}{c^2} f(x) = 0 \\ g''(t) + K^2 g(t) = 0 \end{cases}$$

La forme de la solution est par conséquent

$$s(x, t) = S_0 \cos(Kt + \varphi) \cos\left(\frac{K}{c}x + \psi\right)$$

Ondes stationnaires

Les solutions de l'équation d'Alembert unidirectionnelle pour les ondes stationnaires sont de la forme

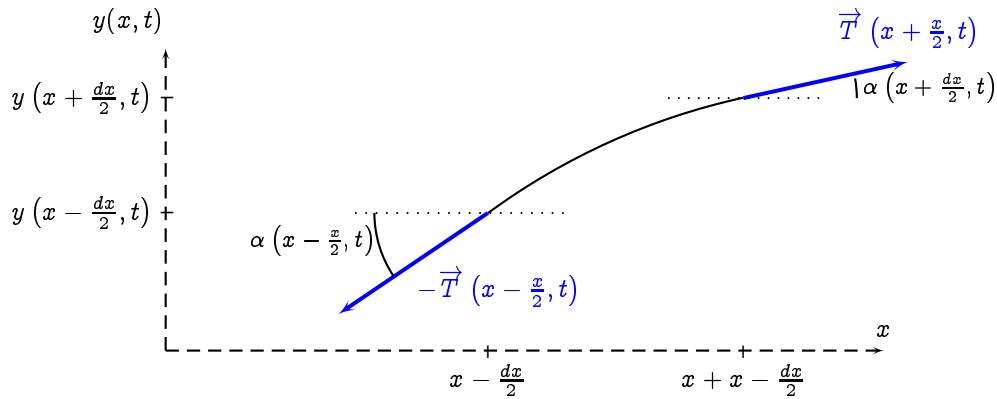
$$s(x, t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

2 Etude d'une corde vibrante

On tend une corde avec une tension T_0 selon un axe horizontal.

La corde tendue au repos étant confondue avec l'axe, on peut en déduire que l'effet de la pesanteur sera négligeable devant les autres actions.

On étudie un élément d'une corde entre les abscisses x et $x + dx$. Cette corde est tendue et subie des déformations dans le plan XOY caractérisées par le déplacement $y(x, t)$ de l'élément par rapport à sa position d'équilibre.



2.1 Equation d'Alembert pour la corde

Système étudié La corde a une masse linéique μ .

On considère l'élément de corde de masse de longueur élémentaire ds et de masse élémentaire $dm = \mu ds$.

Ce système, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen, est soumis à

- La tension des portions du fil à gauche $-\vec{T}(x, t)$ et à droite $\vec{T}(x + dx, t)$
- Le poids que l'on négligera devant les autres actions

Faibles déformations On considérera qu'à chaque instant les déformations de la cordes sont très faibles devant sa longueur, de sorte que la tangente à la corde en tout point fait un angle $\alpha(x, t)$ avec l'horizontale très petit

$$|\alpha(x, t)| \ll 1 \rightarrow \left| \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right| \ll 1$$

On peut notamment en déduire les expressions approchées, au premier ordre en $\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$\begin{cases} \cos \alpha \equiv 1 \quad \forall (x, t) \\ \sin \alpha \equiv \alpha \equiv \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \end{cases}$$

Bilan dynamique

$$dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \vec{u}_y = -\vec{T}(x, t) + \vec{T}(x + dx, t)$$

On peut alors projeter cette relation selon les deux axes

$$\begin{cases} 0 = -T(x, t) \cdot \cos \alpha(x, t) + T(x + dx, t) \cdot \cos \alpha(x + dx, t) \\ dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -T(x, t) \cdot \sin \alpha(x, t) + T(x + dx, t) \cdot \sin \alpha(x + dx, t) \end{cases}$$

Vu l'hypothèse des faibles perturbations, on peut donc en déduire que

$$\begin{cases} T(x, t) = T(x + dx, t) \quad \forall (x, t) \rightarrow T(x, t) = T_0 \\ dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \cdot [\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)] \end{cases}$$

Comme $\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t) \equiv \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \cdot dx$ et que $\alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}$, on en déduit l'équation vérifiée par $y(x, t)$

$$\mu \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

La célérité de l'onde se propageant le long d'une corde de masse linéique μ avec une tension T_0 est $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

2.2 Cas d'une corde fixée à ses deux extrémités

2.2.1 Modes propres

La corde décrite précédemment est fixée telle que $y(0, t) = y(L, t) = 0$

Type d'ondes Imaginons une onde se propageant selon les x croissants. La condition aux limites $y(L, t) \neq 0 \forall t$, ce qui est incohérent avec la condition aux limites de la corde fixée en $x = L$.

Il ne peut donc pas exister d'onde plane progressive selon un seul sens. On peut imaginer alors que l'onde se "réfléchisse" à l'extrémité de la corde, ce qui fait alors apparaître une onde progressive dans l'autre sens.

Cette superposition d'ondes progressives peut alors correspondre au phénomène d'onde stationnaires. On va donc partir de la forme de la solution associée à ce type d'onde et vérifier que cela est cohérent avec les conditions aux limites.

Forme générale de la solution On cherche donc à résoudre

$$s(x, t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}$$

Les conditions aux limites imposent

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 = S_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(\psi) \\ y(L, t) = 0 = S_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(k.L + \psi) \end{cases} \quad \forall t \rightarrow \begin{cases} \cos(\psi) = 0 \\ \cos(k.L + \psi) = 0 \end{cases}$$

On peut choisir la valeur de $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$, choisissons par exemple $\psi = \frac{\pi}{2}$. On peut alors en déduire des valeurs quantifiées du nombre d'onde

$$\cos(k.L + \psi) = 0 \rightarrow \sin(k.L) = 0 \rightarrow k_n = n \frac{\pi}{L} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Grandeurs caractéristiques On peut alors étudier un mode propre de la corde, correspondant à une valeur précise de n

– La pulsation temporelle est $\omega_n = n \cdot \frac{\pi c}{L} = n \omega_0$ avec $\omega_0 = \frac{\pi c}{L}$ la pulsation fondamentale

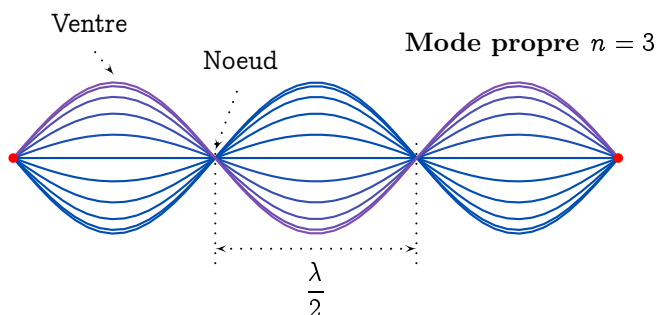
– La longueur d'onde du phénomène est $\lambda_n = \frac{1}{n} \frac{L}{2}$.

En effet, 2 noeuds sont distants d'une demi longueur d'onde. La longueur de la corde correspond donc pour le fondamental à la moitié de la longueur d'onde.

Une corde de tension T_0 et de longueur L , excitée initialement, aura une déformation transversale

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \varphi_n\right) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

correspondant à la somme de modes propres de pulsation propre $n \frac{\pi c}{L}$



On pourra se rappeler facilement que la distance entre deux noeuds est $\frac{\lambda}{2}$, et que l'on trouve entre les deux extrémités $n - 1$ noeuds, ce qui amène à retrouver la relation

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \rightarrow k_n = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_n} = n \frac{\pi}{L} \rightarrow \omega_n = k_n c = n \frac{\pi c}{L}$$

2.2.2 Influence de la condition initiale (*Pour aller plus loin...*)

On préférera ici l'écriture de la déformation :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \left(n \frac{\pi c}{L} t \right) + B_n \sin \left(n \frac{\pi c}{L} t \right) \right] \sin \left(n \frac{\pi x}{L} \right) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Description de la condition initiale Considérons une corde de guitare que l'on pince à une distance $\frac{L}{p}$ d'une extrémité. On écarte la corde de sa position d'équilibre avant de la lâcher sans vitesse initiale. On exploite les conditions initiales

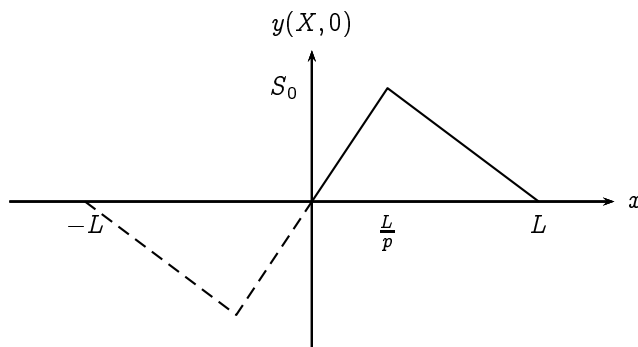
$$\begin{cases} y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(n \frac{\pi x}{L} \right) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \pi c}{L} B_n \sin \left(n \frac{\pi x}{L} \right) \end{cases}$$

Ici La condition initiale sur la vitesse nous donne immédiatement $B_n = 0$. Reste à déterminer les valeurs de A_n vérifiant

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left(n \frac{\pi x}{L} \right)$$

On s'aperçoit que les A_n correspondent en fait aux coefficient du développement en série de Fourier d'une fonction identique à $y(x, 0)$, mais définie $\forall x$ avec une périodicité spatiale $2L$

Or on peut imaginer la corde s'étendant entre $-L$ et L , la déformation correspondant alors à une fonction impaire. L'évolution de la partie entre 0 et L n'en serait pas modifiée. Cela nous permet de déterminer les coefficients A_n



Or pour une fonction périodique de période T_0 du type $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega_0 t)$, les coefficients sont définis par

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

Par analogie, ayant une fonction de périodicité spatiale $2L$, on obtient donc

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L y(x, 0) \cos \left(n \frac{\pi x}{L} \right) dx$$

2.3 Corde de Melde

La corde est toujours fixée à son extrémité $x = L$. Mais on impose désormais en $x = 0$ une oscillation de l'extrémité de la corde du type

$$y(0, t) = y_0 \cos(\omega t)$$

On néglige tout phénomène dissipatif dans l'étude théorique. Cependant, ceux-ci existeront nécessairement dans la réalité. On peut donc considérer le régime permanent établi au bout d'une certaine durée. C'est ce régime que l'on va étudier.

Forme générale de la solution Pour les raisons évoquées dans l'exemple précédent, la solution correspondra nécessairement à la superposition d'ondes progressives dans des sens opposés. On recherche donc une solution de type stationnaire. Par contre le système étant excité à la pulsation ω répondra selon toute vraisemblance avec la même pulsation.

On propose donc une solution de la forme

$$s(x, t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

Utilisation des conditions aux limites Il n'y a pas de condition initiale, celle-ci n'influant que sur la réponse en régime transitoire. Par contre les conditions aux limites existent à chaque instant.

$$\text{CL pour } x = 0 : y(0, t) = y_0 \cos(\omega t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(\psi) \quad \forall t \rightarrow \begin{cases} t = 0 : S_0 \cos \varphi \cos(\psi) = y_0 \\ \omega t = \frac{\pi}{2} : -S_0 \sin \varphi \cos \psi = 0 \end{cases}$$

On en déduit que nécessairement $\varphi = 0$ donc $S_0 \cos \psi = y_0$. On poursuit donc l'exploitation des conditions aux limites

$$\text{CL pour } x = L : y(L, t) = 0 = S_0 \cos(\omega t) \cos(kL + \psi) \quad \forall t \rightarrow \cos(kL + \psi) = 0$$

Cela est vérifié pour $kL + \psi = \frac{\pi}{2} \text{ mod}(\pi)$. On peut choisir une des valeurs possible pour ψ , par exemple

$$\psi = \frac{\pi}{2} - kL \rightarrow \cos(\psi) = \sin(kL)$$

d'où

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t) \frac{\sin[k(L - x)]}{\sin(kL)} \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}$$

On remarque que l'amplitude des oscillations de la corde tendra vers l'infini à chaque fois que $kL \rightarrow n\pi$, c'est à dire si $\omega = n \frac{\pi c}{L} = n\omega_0$ avec ω_0 la pulsation du fondamental.

Cependant, on ne peut pas donner de signification physique à ce résultat car

- L'équation a été obtenue dans l'hypothèse de petites déformations de la corde
- Des phénomènes dissipatifs doivent être pris en compte dans le cas de fortes amplitudes

Une corde excitée à une pulsation ω entrera en résonance pour toute valeur de ω égale à une des fréquences propres de la corde

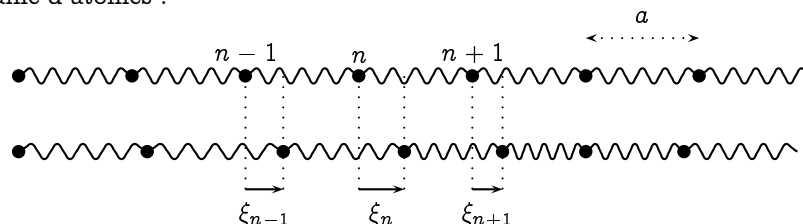
3 Onde dans un solide

3.1 Milieu discret

On considère une onde se propageant selon l'axe Ox .

Les atomes peuvent se déplacer autour de leur position d'équilibre. Mais la structure cristalline fait qu'ils y seront ramenés. On peut modéliser les interactions entre atome par des ressorts de raideur k liant chacun des atome avec ses plus proches voisins.

On peut alors observer une chaîne d'atomes :



Il s'agit donc d'un modèle "discret" du milieu : chaque atome est repéré par une position x_n . Pour plus de simplicité, on va définir le déplacement de l'atome par rapport à sa position d'équilibre :

$$\xi_n = x_n(t) - x_n(q)$$

On peut alors effectuer l'étude mécanique pour le $n^{ième}$ atome :

$$m\ddot{\xi}_n = -k \cdot (\xi_n - \xi_{n-1}) + k \cdot (\xi_{n+1} - \xi_n)$$

$$\ddot{\xi}_n = \omega_0^2 \cdot (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2 \cdot \xi_n) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3.2 Approximation des milieux continus

Les distances caractéristiques inter atomiques étant de l'ordre de nanomètre, on peut considérer que la distance a entre deux positions d'équilibre est très petite devant les distances caractéristiques de la propagation de l'onde (à l'échelle macroscopique, quelques centimètres au moins).

$$a \ll \text{dimensions macroscopiques}$$

A un instant t , la caractéristique de l'onde (le déplacement ξ de l'atome) concerne l'atome à l'abscisse $x = n.a$. Vu les remarques précédentes, on peut considérer que

$$\begin{aligned}\xi_{n-1} &= \xi(x_n - a, t) \equiv \xi(x_n, t) - a \cdot \frac{\partial \xi(x_n, t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \xi(x_n, t)}{\partial x^2} \\ \xi_{n+1} &= \xi(x_n + a, t) \equiv \xi(x_n, t) + a \cdot \frac{\partial \xi(x_n, t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \xi(x_n, t)}{\partial x^2}\end{aligned}$$

L'équation démontrée dans la partie précédente donne alors

$$\ddot{\xi}(x_n, t) = \omega_0^2 \cdot a^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi(x_n, t)}{\partial x^2}$$

Cette relation, vérifiée pour toute valeur de x_n , est extrapolée pour toute valeur de x . Il s'agit là de l'approximation des milieux continus.

$$\ddot{\xi}(x, t) = \omega_0^2 \cdot a^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2}$$

3.3 Module d'Young

La propagation de l'onde dans un solide correspond à la propagation d'un allongement sous l'effet d'une force exercée sur une section du solide.

La modélisation du milieu permet d'écrire, pour la zone de déformation élastique du milieu :

$$\underbrace{\frac{\Delta L}{L}}_{\text{Allongement relatif}} = \underbrace{\frac{1}{E}}_{\text{coefficient}} \cdot \underbrace{\frac{F}{S}}_{\text{pression}}$$

Module d'Young

On nomme module d'Young E , exprimé en *Pascal* (Pa) la caractéristique du solide telle que, dans sa zone de déformation élastique :

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$$

Cas d'un réseau cubique simple

Considérons ce réseau soumis à une pression constante.

On considère une section S sur laquelle on exerce une force F .

Pour le réseau cubique de paramètre de maille a , la surface S contient $n = \frac{S}{a^2}$ atomes. On exerce donc sur chaque atome une force

$$f = \frac{F}{n} = a^2 \frac{F}{S}$$

D'autre part, l'allongement total ΔL de la chaîne de ressort peut être reliée à l'allongement Δl de chaque ressort : $\Delta L = \frac{L}{a} \cdot \Delta l$ avec $f = k \cdot \Delta l$, ce qui donne

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{f}{k \cdot a}$$

La définition du module d'Young donne alors $\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S}$, soit $\frac{f}{k \cdot a} = \frac{1}{E} \cdot \frac{f}{a^2}$

Pour ce solide, $E = \frac{k}{a}$

3.4 Célérité de l'onde dans le solide

On peut alors regrouper les deux relations
$$\begin{cases} E = \frac{k}{a} \\ \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = \underbrace{\omega_0^2 \cdot a^2}_{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire $c^2 = \frac{k}{m} \cdot a^2 = \frac{k}{a} \cdot \frac{a^3}{m} = E \cdot \frac{a^3}{m}$

Or pour la maille cubique simple, on a un atome par maille, donc pour une maille, $\begin{cases} m_{maille} = m \\ V_{maille} = a^3 \end{cases}$

On en déduit la masse volumique pour la maille, et donc pour le milieu

$$\mu = \frac{m}{a^3}$$

Célérité dans un solide

La célérité de l'onde dans le solide de masse volumique μ et de module d'Young E est telle que

$$c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

4 Interface entre deux milieux

On considère une propagation unidirectionnelle selon la direction x et un changement du milieu de propagation en x_0 . Dans le cas d'un milieu infini pour $x > x_0$ et d'une onde provenant de $-\infty$, on définit :

- Pour $x < 0$ une perturbation comme la somme d'ondes progressive incidente $\underline{s}_i \left(t - \frac{x}{c_1} \right)$ et réfléchie $\underline{s}_r \left(t + \frac{x}{c_1} \right)$
- Pour $x > x_0$ une onde transmise $\underline{s}_t \left(t - \frac{x}{c_2} \right)$

Coefficients de réflexion et transmission

À l'interface entre deux milieux en x_0 , on définit les coefficients $\underline{r}$ de réflexion et $\underline{t}$ de transmission tels que

$$\underline{r} = \frac{\underline{s}_r(x_0^-, t)}{\underline{s}_i(x_0^-, t)} \quad \underline{t} = \frac{\underline{s}_t(x_0^+, t)}{\underline{s}_i(x_0^-, t)}$$

Ces coefficients seront déterminés à partir de différentes grandeurs selon le type d'onde étudié :

- Onde acoustique : déplacement
- Onde électrique : tension
- Onde électromagnétique : Champ électrique

Impédance

On définit la notion d'impédance pour une onde progressive selon les x croissants uniquement. L'impédance est alors indépendante de x et t .

Dans le cas d'une onde dans un conducteur, on a $\underline{Z} = \frac{\underline{u}(x, t)}{\underline{i}(x, t)}$

Dans le cas de la corde : $\underline{Z} = -\frac{T_y}{\underline{v}_y}$