Corrigé du Sujet de Recherche n°04.

Problème (Concours Commun Mines-Ponts PC 2006).

Question non posée, mais bon :

Pour une matrice M donnée, on va confondre cette matrice et son endomorphisme canoniquement associé dans $\mathbb{R}^n$.

Considérons maintenant deux matrices A et B diagonalisables qui commutent et les espaces propres de A. Puisque A et B commutent, ces espaces propres sont stables par B, et comme B est diagonalisable, l'endomorphisme induit par B dans ces espaces est encore diagonalisable.

Si maintenant on considère dans chaque espace propre de A une base dans laquelle l'endomorphisme induit par B est diagonalisable, la réunion de toutes ces bases fournit bien une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle les endomorphismes associés à A et B ont des matrices représentatives diagonales, dont on obtient une matrice inversible P qui rend A et B simultanément semblables à des matrices diagonales.

Partie 1 : préliminaires.

1. Supposons A positive.
   Alors pour toute valeur propre λ de A, et X un vecteur propre associé, on a :
   $A.X = \lambda.X$, donc : $0 \leq (A.X|X) = \lambda.(X|X)$, et comme X est non nul, sa norme aussi et : $\lambda \geq 0$.
   Réciproquement, supposons toutes les valeurs propres de A positives, et soit P orthogonale, D diagonale, telles que : $D = P^{-1}.A.P = {}^tP.A.P$.
   Soit alors : $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, et : $Y = {}^tP.X$.
   On constate que : $(A.X|X) = {}^tX.A.X = {}^tX.P.D.{}^tP.X = {}^tY.D.Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.y_i^2 \geq 0$, puisque toutes les valeurs propres sont positives.
2. Supposons A définie positive.
   Alors toutes ses valeurs propres sont positives d'après la question précédente, et toujours avec les notations de la question précédente, l'égalité obtenue au-dessus montre que :
   $(A.X = 0) \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.y_i^2 = 0) \Rightarrow (Y = 0) \Rightarrow (X = 0)$.
   Donc A est inversible (puisque l'endomorphisme canoniquement associé, par exemple, est injectif).
   Réciproquement, supposons A inversible, de valeurs propres positives.
   Alors A est déjà positive d'après la question précédente, et elle est de plus définie car :
   $(X \neq 0) \Rightarrow (Y \neq 0) \Rightarrow ((A.X|X) > 0)$, puisque toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
3. Considérons toujours P orthogonale et D diagonale (dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A donc des réels strictement positifs).
   Notons de plus Δ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les racines de ceux de D.
   Alors : $(P.\Delta.{}^tP)^2 = P.\Delta^2.{}^tP = P.D.{}^tP = A$, autrement dit la matrice : $C = P.\Delta.{}^tP$, vérifie : $C^2 = A$.
   Mais on a aussi : ${}^tC = {}^t({}^tP).{}^t\Delta.{}^tP = C$, et elle est symétrique.
   Enfin, ses valeurs propres sont les éléments diagonaux de Δ qui sont strictement positifs et C est bien positive et inversible, donc définie positive.
4. Soient donc A et C symétriques définies positives telles que : $C^2 = A$, et λ une valeur propre de A.
   Soit : $X \in \ker(C - \sqrt{\lambda}.I_n)$. Alors : $C.X = \sqrt{\lambda}.X$, et : $C^2.X = \lambda.X$, donc : $X \in \ker(A - \lambda.I_n)$.
   On a donc : $\ker(C - \sqrt{\lambda}.I_n) \subset \ker(A - \lambda.I_n)$.
   Mais si de plus μ est une valeur propre de C, alors μ^2 de la même façon est valeur propre de A, et pour toute valeur propre μ de C, l'espace propre $\ker(C - \mu.I_n)$ est inclus dans l'espace propre $\ker(A - \mu^2.I_n)$.
   Enfin, on a : $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\mu \in Sp(C)} \ker(C - \mu.I_n) \subset \bigoplus_{\mu \in Sp(C)} \ker(A - \mu^2.I_n) \subset \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} \ker(A - \lambda.I_n) = \mathbb{R}^n$.
   En effet, A et C sont diagonalisables, donc $\mathbb{R}^n$ est la somme directe de leurs sous-espaces propres.
   D'autre part, la deuxième somme directe est bien incluse dans la troisième car : $\{\mu^2, \mu \in Sp(C)\} \subset Sp(A)$.
   Mais alors toutes les inclusions sont des égalités et :
   - $\{\mu^2, \mu \in Sp(C)\} = Sp(A)$: les valeurs propres de A sont les carrés des valeurs propres de C,
   - pour chaque : $\mu \in Sp(C)$, $\ker(C - \mu.I_n) = \ker(A - \mu^2.I_n)$,

   et donc avec nos notations du début de la question : $\ker(C - \sqrt{\lambda}.I_n) = \ker(A - \lambda.I_n)$, pour toute valeur propre λ de A.
5. L'existence et l'unicité de C est donc garantie par les questions 3 et 4.
   Soit maintenant B' une base orthonormale de vecteurs propres de A. Alors tout vecteur de cette base est

vecteur propre de C pour une valeur propre égale à la racine de la valeur propre correspondante pour A (d'après la question 4) et la matrice C dans cette base est donc bien diagonale.

6. Puisque A est définie positive, A est inversible et A^{-1} aussi.
   De plus les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A donc sont positives.
   En effet, les équivalences : $(A.X = \lambda.X) \Leftrightarrow (A^{-1}.X = \lambda^{-1}.X)$ et : $(A^{-1}.X = \mu.X) \Leftrightarrow (A.X = \mu^{-1}.X)$, montrent que les valeurs propres de A^{-1} sont **les** inverses des valeurs propres de A.
   Enfin A^{-1} est symétrique puisque A l'est car : ${}^t(A^{-1}).{}^tA = {}^t(A.A^{-1}) = I_n$, et : ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = A^{-1}$.
   Donc A^{-1} étant symétrique définie positive, cela garantit l'existence et l'unicité de $A^{-1/2}$.
7. Reprenons maintenant les notations de la questions 5 avec : $A = P.D.{}^tP$, et : $A^{1/2} = P.\Delta.{}^tP$.
   La matrice D^{-1} est diagonale à éléments diagonaux égaux aux inverses de ceux de D, et : $A^{-1} = P.D^{-1}.{}^tP$.
   Vu ce qui a été établi à la question 5, il est alors clair que : $A^{-1/2} = P.\Delta'.{}^tP$, où Δ' est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les racines carrées de ceux de D^{-1}, donc les inverses de ceux de Δ.
   Autrement dit : $\Delta' = \Delta^{-1}$.
   Donc : $A^{-1/2} = P.\Delta^{-1}.{}^tP = (P.\Delta.{}^tP)^{-1} = (A^{1/2})^{-1}$.
8. Soit enfin B une matrice symétrique positive qui commute avec A.
   Alors $A^{1/2}$ et $B^{1/2}$ commutent.
   En effet, si on note P une matrice orthogonale qui diagonalise à la fois A et B (ce qui est possible vu la question préliminaire et le fait que dans chaque espace propre de A ou de B on peut choisir des bases orthonormales), alors :
   $A = P.D_A.{}^tP$, $A^{1/2} = P.\Delta_A.{}^tP$, et : $B = P.D_A.{}^tP$, $B^{1/2} = P.\Delta_B.{}^tP$, et comme deux matrices diagonales commutent, on en déduit que : $A^{1/2}.B^{1/2} = P.\Delta_A.\Delta_B.{}^tP = P.\Delta_B.\Delta_A.{}^tP = B^{1/2}.A^{1/2}$.

Partie 2 : inégalité de Kantorovitch.

1. Soit P orthogonale et D diagonale telles que : $A = P.D.{}^tP$.
   Alors, pour : $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, notons : $Y = {}^tP.X$.
   Dans ce cas : $(X|X) = {}^tX.X = {}^tY.{}^tP.P.Y = {}^tY.Y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.
   Puis : $(A.X|X) = {}^tX.A.X = {}^tY.D.Y = \sum_{i=1}^{n} d_i.y_i^2$, et : $(A^{-1}.X|X) = {}^tY.D^{-1}.Y = \sum_{i=1}^{n} d_i^{-1}.y_i^2$.
   Donc :
   - $(X|X)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^4 + 2.\sum_{i<j} y_i^2.y_j^2$, et :
   - $(A.X|X).(A^{-1}.X|X) = \sum_{i=1}^{n} y_i^4 + \sum_{i<j}\left(\frac{d_i}{d_j} + \frac{d_j}{d_i}\right).y_i^2.y_j^2$.

   Or pour tout : $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\left(t + \frac{1}{t}\right) \geq 2$, comme le montre immédiatement une étude de fonction, et on en déduit l'inégalité (2).
2. Puis on peut remarquer que dans l'inégalité précédente, et il y a égalité si et seulement si : $t = 1$.
   Donc il y a égalité dans l'inégalité (2) pour tout X si et seulement si il y a égalité pour tout Y et donc si et seulement si :
   $\forall\ i < j$, $d_i.d_j^{-1} = 1$, autrement dit : $d_i = d_j$.
   Finalement il y a égalité pour tout X si et seulement si A est une matrice scalaire : $A = \lambda.I_n$.
3. Puisque A est diagonalisable, on a : $A = P.D.{}^tP$, avec D diagonale et P orthogonale, et : $F(A) = P.F(D).{}^tP$, donc les valeurs propres de F(A) sont les valeurs $F(\lambda)$, pour : $\lambda \in Sp(A)$.
4. Les racines de F sont m et M, et les éléments de Sp(A) sont entre ces valeurs.
   Donc toutes les valeurs propres de F(A) sont négatives.
5. Comme combinaison linéaire de matrices symétriques, N est symétrique.
   D'autre part, N s'écrit : $N = (-F(A)).A^{-1}$.
   Puisque $(-F(A))$ et A^{-1} sont diagonalisables (car symétriques) et commutent, on peut les diagonaliser dans une même base orthonormale et : $(-F(A)) = Q.D.{}^tQ$, $A^{-1} = Q.D'.{}^tQ$, donc : $N = Q.D.D'.{}^tQ$.
   Finalement, les valeurs propres de N sont des produits de valeurs propres de $(-F(A))$ et de A^{-1}, donc sont toutes positives.
   N est bien une matrice positive.
6. Immédiatement :
   - $f(0) = (A^{-1}.X|X).m.M \geq 0$, puisque A^{-1} est aussi positive comme A l'est, et :

- $f(1) = (A.X|X) - (m+M).(X|X) + (A^{-1}.X|X).m.M$.

Or : $f(1) = ([A.X - (m+M).X + m.M.A^{-1}.X]|X) = -(N.X|X) \leq 0$, puisque N est positive.

7. On en déduit que f s'annule entre 0 et 1 et que son discriminant est positif ou nul, donc :
   $(m+M)^2.(X|X)^2 - 4.m.M.(A.X|X).(A^{-1}.X|X) \geq 0$, soit l'inégalité que l'on voulait.
8. On cherche en fait la valeur inférieure sur D de : $\left(\frac{m}{M}+\frac{M}{m}\right)=\left(t+\frac{1}{t}\right)=\varphi(t)$, avec : $t = \frac{m}{M}$.

   Or cette fonction de t est décroissante sur]0,1], croissante sur [1,+∞).
   Par ailleurs quand (m,M) varie dans D, la valeur t correspondante reste dans : $]0,\lambda_1/\lambda_n] \subset]0,1]$.
   Donc toutes les valeurs prises par la fonction φ de (m,M) étudiée restent dans $[\varphi(\lambda_1/\lambda_n),+\infty)$.
   Mais comme pour : $(m,M) = (\lambda_1,\lambda_n)$, qui est bien un élément de D, on atteint la valeur minimale possible, on en déduit que le inf cherché est en fait un min et qu'il est atteint pour : $(m,M) = (\lambda_1,\lambda_n)$, où il vaut :

   $$\inf_D \frac{(m+M)^2}{m.M} = \varphi\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right) = \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{\lambda_1.\lambda_n}.$$
9. Pour les données proposées on a donc X_1 et X_2 orthogonaux (puisque associé à des valeurs propres distinctes de A) et :
   - $(A.X|X) = (\lambda_1.X_1+\lambda_n.X_n|X_1 + X_n) = \lambda_1.(X_1|X_1) + \lambda_n.(X_n|X_n) = \lambda_1+\lambda_n$,
   - $(A^{-1}.X|X) = \lambda_1^{-1} + \lambda_n^{-1}$, de la même façon,
   - $(X|X) = 2$,

   d'où : $\frac{(A.X|X).(A^{-1}.X|X)}{(X|X)^2} = \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{\lambda_1.\lambda_n}$.
10. Si A n'est pas une homothétie, l'inégalité (3) devient une égalité pour le vecteur (X_1+X_n), et si A est une homothétie, c'est toujours une égalité comme on le vérifie immédiatement.
    Autrement dit, c'est la meilleure inégalité que l'on peut proposée, vraie pour tout : $X \in \mathcal{M}_{n,1}$.

Partie 3 : inégalité de Pólya-Szegö.

On suppose dorénavant que A_1 et A_2 sont deux matrices symétriques définies positives qui commutent.
On note m_i (resp. M_i) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de A_i, pour : i = 1, 2.
On pose : $D = A_1.A_2^{-1}$.

1. On sait déjà qu'on peut diagonaliser A_1 et A_2 par l'intermédiaire d'une même matrice orthogonale P, c'est-à-dire : $\exists (D_1, D_2)$ diagonales, $\exists P \in O(n)$, $A_1 = P.D_1.{}^tP$, $A_2 = P.D_2.{}^tP$.
   D par ailleurs est symétrique définie positive.
   En effet, on a : $D = P.D_1.D_2^{-1}.{}^tP$, donc les valeurs propres de D sont des produits positifs, compris entre $m'=\frac{m_1}{M_2}$, et : $M'=\frac{M_1}{m_2}$.
   D'autre part, D est évidemment inversible comme produit de matrices inversibles, et elle est symétrique car : ${}^tD = {}^t(A_2^{-1}).{}^tA_1 = ({}^tA_2)^{-1}.A_1 = A_2^{-1}.A_1 = A_1.A_2^{-1}$ (en effet : $(A_1.A_2 = A_2.A_1) \Rightarrow (A_2^{-1}.A_1 = A_1.A_2^{-1})$).
   On peut donc lui appliquer l'inégalité (3) et proposer : $\alpha = \frac{(m'+M')^2}{4.m'.M'} = \frac{(m_1.m_2+M_1.M_2)^2}{4.m_1.m_2.M_1.M_2}$.
2. On écrit :
   - $(D.(A_1.A_2)^{1/2}.X|(A_1.A_2)^{1/2}.X) = {}^tX.A_1.A_2^{-1}.P.D_1^{1/2}.D_2^{1/2}.{}^tP.P.D_1^{1/2}.D_2^{1/2}.{}^tP.X = {}^tX.A_1.A_2^{-1}.P.D_2.{}^tP.P.D_1.{}^tP.X$,

   puisque les matrices A_1 et A_2 commutent, tout comme les matrices diagonales qui interviennent aussi.
   d'où :
   - $(D.(A_1.A_2)^{1/2}.X|(A_1.A_2)^{1/2}.X) = {}^tX.A_1.A_2^{-1}.A_2.A_1.X = {}^tX.A_1.A_1.X = (A_1.X|A_1.X)$.
3. On établit de même, puisque : $D^{-1} = A_2.A_1^{-1}$, que : $(D^{-1}.(A_1.A_2)^{1/2}.X|(A_1.A_2)^{1/2}.X) = (A_2.X|A_2.X)$.
   Enfin, on a aussi : $((A_1.A_2)^{1/2}.X|(A_1.A_2)^{1/2}.X) = {}^tX.(A_1.A_2)^{1/2}.(A_1.A_2)^{1/2}.X = {}^tX.A_1.A_2.X = (A_1.X|A_2.X)$, et donc, en posant : $Y = (A_1.A_2)^{1/2}.X$, pour X dans $\mathcal{M}_{n,1}$, et en appliquant le résultat de la question III.1, on obtient bien l'inégalité cherchée.
4. Pour les n-uplets (a_k) et (b_k) proposés, on construit alors les matrices diagonales (et symétriques) A et B, ayant comme termes diagonaux ces n-uplets.
   Elles sont de plus définies positives puisque inversibles de valeurs propres positives.
   Enfin, en appliquant la dernière inégalité obtenue à la matrice colonne formée de 1, on obtient :

   $$(A.X|A.X) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,\ (B.X|B.X) = \sum_{k=1}^{n} b_k^2,\ (A.X|B.X) = \sum_{k=1}^{n} a_k.b_k,\ m_1 = a_1,\ M_1 = a_n,\ m_2 = b_1,\ M_2 = b_n,$$

   d'où le résultat cherché, à savoir l'inégalité (1).