Sujet de Recherche n°07.

février 2016

Problème (Banque PT 2009).

Dans tout le problème, n désigne un entier strictement positif et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Partie 1.

1. Dans cette question, E est de dimension 2.

   On considère la base : $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$, de E et : $f \in \mathscr{L}(E)$, telle que : $\text{mat}_{\mathscr{B}}(f) = M = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer que f est un projecteur et préciser son rang.
   b. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. Dans cette question, E est de dimension 3 et on considère la base : $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, de E.
   D désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur : $\varepsilon_1 = e_1 + 3.e_2 - e_3$, et P le plan engendré par les vecteurs : $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$, et : $\varepsilon_3 = 2.e_1 - e_2$.
   Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ du projecteur sur P parallèlement à D.
3. Dans cette question (et jusqu'à la fin de la partie 1), p désignera un projecteur de E, où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
   Montrer que ker(p) et Im(p) sont supplémentaires dans E.
4. Soit q l'endomorphisme défini par : $q = id_E - p$.
   Montrer que q est un projecteur de E.
   Déterminer le noyau et l'image de q puis calculer poq et qop.
5. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de E, et : $q = p_1 + p_2 - p_2 o p_1$.
   a. Montrer que si : $p_1 o p_2 = 0$, alors q est un projecteur de E.
   b. Montrer que : $\ker(p_1) \cap \ker(p_2) = \ker(q)$.
6. L'espace E est désormais muni d'un produit scalaire noté (.|.) et la norme associée sera notée $\|\ .\ \|$.
   Soit p un projecteur de E.
   a. Montrer que si p est un projecteur orthogonal de E (donc tel que Im(p) et ker(p) sont orthogonaux), alors : (*) $\forall\, u \in E,\ \|p(u)\| \leq \|u\|$.
   b. Montrer réciproquement que si p vérifie (*), alors p est un projecteur orthogonal.

Partie 2.

Soit f un endomorphisme de E qui commute avec tous les endomorphismes de E.

1. Soit : $u \in E$, $u \neq 0$.
   Justifier l'existence d'un supplémentaire H_u de Vect(u), en précisant $\dim(H_u)$.
2. A l'aide de p_u, projecteur sur Vect(u) parallèlement à H_u, montrer que : $\exists\, \lambda_u \in \mathbb{R}$, $f(u) = \lambda_u.u$.
3. Soit v un vecteur non colinéaire à u.
   Montrer que : $\lambda_v = \lambda_u$.
4. Reprendre la question précédente lorsque v est non nul et colinéaire à u.
5. En déduire les endomorphismes de E qui commutent avec tout endomorphisme de E.

Partie 3.

On considère ici le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On définit l'application φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$\forall\, (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\varphi(A,B) = \text{tr}(A.{}^tB)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   Montrer que : $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leq n.\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$.
3. On note $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{S}_n$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. On note Φ la norme associée au produit scalaire φ.
   Soit U une matrice orthogonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Exprimer $\Phi(M.U)$ en fonction de $\Phi(M)$.

5. On considère, dans cette question uniquement que : n = 2.

   On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : F = $\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, avec : $(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

   Déterminer la matrice A' image de : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, par la projection orthogonale sur F.

Partie 4.

On définit l'application ψ sur $\mathbb{R}_3[X]^2$ par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2,\ \psi(P,Q) = \sum_{i=0}^{3} P(i).Q(i)\ .$$

1. Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit : F = $\mathbb{R}_2[X]$, muni de sa base canonique : $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
   Orthonormaliser par le procédé de Schmidt la base $\mathcal{B}$ en une base : $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$, vérifiant de plus : $\forall\ 0 \leq k \leq 2,\ \psi(X^k, P_k) > 0$.
3. Soit : $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1,3,2,3)$.
   On considère l'ensemble des sommes : $\Sigma = \{\sum_{i=0}^{3} \left| x_i - P(i) \right|^2\ ,\ P \in F\}$.
   Montrer que Σ possède un minimum, atteint en un unique polynôme S de $\mathbb{R}_3[X]$, et déterminer ce minimum.
   On pourra s'aider de la projection orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$ sur F.