

TD 20 Dimension finie.

I. Exercices.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel complexe et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Déterminer si les familles suivantes forment une base de E :

- $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_3, \dots, e_1 + e_n)$
- $\mathcal{F}_2 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n)$
- $\mathcal{F}_3 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$
- $\mathcal{F}_4 = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, \dots, e_1 + e_2 + \dots + e_n)$

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ des formes linéaires sur $\mathbf{R}^3$, on considère (f_1, f_2, f_3) définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, f_1(x, y, z) = x - y - z, f_2(x, y, z) = 2x - y - z, f_3(x, y, z) = x + 2y + z$$

La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ou liée ?

Exercice 3. Dans $\mathbf{R}_4$, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0 \text{ et } z = 2t\} \text{ et } G = \{(x, y, z, t) \mid y + z + t = 0\}.$$

Déterminer une base et la dimension de F , G , $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel, puis f et g deux endomorphismes dans $\mathcal{L}(E)$ tels que :

$$E = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$$

On suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie. Montrer à l'aide des dimensions que les deux sommes précédentes sont directes.

Exercice 5. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel de dimension n .

1. Montrer que $H_1 + H_2 = E$.
2. En déduire la dimension de $H_1 \cap H_2$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E vérifiant $F \not\subset H_1$, montrer que F et H_1 sont supplémentaires dans E . on précisera un encadrement de la dimension de $F + H_1$.

Exercice 6.

1. Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension n , $n \in \mathbf{N}$.

Montrer que : $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)$, $rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v)$.

2. Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie, soit F un sous-espace vectoriel de E , soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on note u_0 la restriction de u à F .

a) Montrer que $Ker(u_0) = F \cap Ker(u)$.

b) Dédire que : $dim(u(F)) = dim(F) \Leftrightarrow F \cap Ker(u) = \{0\}$.

3. Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie n , soit u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = 0$

a) Montrer que $Im(v) \subset Ker(u)$.

b) Dédire que $rg(u) + rg(v) \leq n$.

II. Problèmes Sous-espaces vectoriels, calcul de bases et de dimension.

Problème 1.

Soit $E = \mathbf{R}^3$ et t un paramètre réel quelconque.

1. Soit F_t le sous-ensemble de E constitué des vecteurs $(x, y, z) \in E$ vérifiant :

$$\begin{cases} (2 - t)x + 2y - 2z = 0 \\ x + (1 + t)y - z = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que F_t est un sous-espace vectoriel de E .

b) Déterminer la dimension et une base de F_t . On discutera suivant les valeurs de t .

c) Montrer en particulier que si $t \neq 0$ alors $F_t = Vect((-2, 1, t - 1))$.

2. Soit $H_t = Vect((t, 0, 1), (0, 1 - t, 1))$.

a) Quelle est la dimension de H_t ?

b) Donner un supplémentaire de H_t dans E .

c) Déterminer la dimension de $H_t \cap F_t$ en fonction de t . Pour quelles valeurs de t , H_t et F_t sont-ils supplémentaires ?

Problème 2.

Soit $n \geq 3$ et $E = \mathbf{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

1. Quel est la dimension de E ?

Soient a et b deux réels distincts.

2. Montrer que $F_a = \{P \in E \mid P(a) = 0\}$, $F_b = \{P \in E \mid P(b) = 0\}$ et $F = \{P \in E \mid P(a) = P(b) = 0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

3. Montrer que la famille

$$\mathcal{B}_a = ((X - a), X(X - a), \dots, X^{n-2}(X - a))$$

est une base de F_a .

4. Déterminer une base de F .

5. Montrer qu'il existe deux réels $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tels que $1 = \alpha(X - a) + \beta(X - b)$

6. En déduire que $E = F_a + F_b$

7. F_a et F_b sont-ils supplémentaires dans E ?

8. Déterminer un supplémentaire de F_a dans E .

Problème 3. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

On considère l'endomorphisme définie par :

$$f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3, f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3, f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3$$

1. Montrer que les ensembles $F = \{u \in \mathbf{R}^3 \mid f(u) = u\}$ et $G = \{u \in \mathbf{R}^3 \mid f(u) = -u\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

2. Déterminer l'expression analytique de f .

3. Déterminer une base de F et une base de G .

4. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

Problème 4. Concours

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$, et $E = \mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degrés au plus égaux à n .

On considère l'application $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$\forall P \in E, f(P) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$$

1.a)♥ Montrer qu'une famille $(Q_k)_{k \in [1;r]}$ de polynômes tous non nuls et qui vérifient :

$$\forall k \in [1; r - 1], \deg(Q_k) < \deg(Q_{k+1})$$

est une famille libre.

1.b) Vérifier que f est linéaire.

2. Déterminer le sous-espace $Im(f)$ (en précisant $rg(f)$) et le sous-espace vectoriel $Ker(f)$.

Indication : On pourra former $f(X^k)$ pour $k \in [0; n]$ et préciser son degré.

3. Soit $Q \in Im(f)$. Montrer qu'il existe un unique élément P de E tel que :

$$f(P) = Q \quad \text{et} \quad P(0) = P'(0) = 0$$

Problème 5.

On considère l'application $\varphi : \mathbf{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ définie par :

$$\forall f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \forall x \in \mathbf{R}, \varphi(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbf{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
2. Soit $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, montrer que $\varphi(f)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
3. φ est-elle surjective ?
- 4.a) Déterminer $\varphi(f_1)$ lorsque $f_1 : x \mapsto \sin(2\pi x)$.
- 4.b) Déterminer $\varphi(f_2)$ lorsque $f_2 : x \mapsto \begin{cases} 1-x & x < 1 \\ \sqrt{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$
- 4.c) φ est-elle injective ? Déterminer $\text{Ker}(\phi)$.
5. On considère la restriction φ_2 de φ aux fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égales à 2. Déterminer une base de $\text{Im}(\varphi_2)$ et en déduire la dimension de $\text{Ker}(\varphi_2)$.